

# スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第13回研究集会

## 概要集

講演者 西村 優作 (早稲田大学)

タイトル 「 $f$ -equitable の一般化とランダムウォーク」

概要 グラフ上のシンプルランダムウォークとは、グラフの頂点上の粒子が辺に沿って異なる頂点へ等確率で移動する離散時間確率過程のことである。ランダムウォークの重要な特徴量として、期待到達時間と呼ばれるものがあり、一般のグラフ上では隣接行列の情報を用いて計算することが出来るものである。先行研究では、西村によって  $f$ -equitable と呼ばれるグラフが定義され、そのグラフの期待到達時間が隣接行列よりも少ない情報で計算できることがわかった。本発表では、この結果を一般化し、距離正則化グラフや擬距離正則グラフといった、距離正則グラフの一般化として考えられる様々なグラフ上の期待到達時間の結果について紹介する。本研究は Aida Abiad 氏 (Eindhoven 大学, Vrije Universiteit Brussels) との共同研究である。

講演者 西村 優作 (早稲田大学)

タイトル 「Kneser 彩色関数とツリーの完全不変量」

概要 Stanley 氏によって彩色対称関数と呼ばれるグラフの不変量が考案され、これがツリーの完全不変量であると予想した。この予想は現在まで未解決である。一方、三枝崎氏らは彩色対称関数を一般化した Kneser 彩色関数を定義した。Kneser 彩色関数は自然数  $k$  によるパラメータを持っており、特に  $k = 1$  の場合、これは彩色対称関数と一致する。従って、Stanley 氏の予想は  $k = 1$  の Kneser 彩色関数がツリーの完全不変量となる、という予想と言い換えることが出来る。本講演では、 $k = 2$  の場合、Kneser 彩色関数がツリーの完全不変量となることを紹介する。

講演者 佐藤 洋輔 (早稲田大学)

タイトル 「頂点重み付き彩色対称関数の一般化」

概要 R.P. Stanley 氏は、グラフの不変量である彩色対称関数を考案した。また、L. Crew 氏と S. Spirkl 氏による、頂点重み付きグラフに対する彩色対称関数の一般化や、三枝崎剛氏らによる、Kneser グラフと呼ばれるグラフを用いた一般化が知られている。本講演では、これら二つの不変量の性質を持ち、特に頂点重み付きグラフの完全不変量となるような新たな不変量を紹介する。さらに、これを応用した有向非巡回グラフや半順序集合に対する完全不変量の構成について述べる。

講演者 須田 庄 (防衛大学校)

タイトル 「Symmetric and skew-symmetric signing of graphs」

概要 グラフが与えられたとき、そのグラフの符号付けであって、符号付き隣接行列のスペクトル半径が最小になるようなものを考察する。Gregory(2012) による、符号付き隣接行列のスペクトル半径の下からの不等式の改良および等号成立する例を与える。また、強正則グラフや距離正則グラフ

の最良の符号付けを紹介し、さらに対称な符号付けの理論を歪対称な符号付けへと拡張する。

講演者 福永 修一 (広島工業大学)

タイトル 「安全性を考慮したプライバシー保護強化学習」

概要 強化学習は試行錯誤により報酬を最大化する方策を獲得する方法であり、この方法の応用先の1つとして治療の自動化がある。治療を自動化するためには患者からデータを取得する必要があるが、その際に患者のプライバシーを保護する必要がある。さらに学習を行う過程において薬の過剰投与を避ける必要がある。本研究ではプライバシーを保護した強化学習においてさらに安全性を考慮した方法を提案する。

講演者 永原 正章 (広島大学)

タイトル 「非凸最適化によるネットワークコミュニティ検出」

概要 本発表では、ネットワークの構造に基づいてノード二つのグループに分割するネットワークコミュニティ検出問題について考察する。ネットワークコミュニティ検出の問題は、モジュラリティと呼ばれる量を最大化するノードの分割を見つける問題であり、組み合わせ最適化問題となるため、大規模ネットワークに対しては解くことが非常に難しい。本研究では、この問題に対して、絶対値の和による正則化を用いた Difference-of-Convex (DC) 計画問題に緩和して効率的に解く手法を提案する。

講演者 坂内 英一 (九州大学名誉教授)

タイトル 「Siegel 上半空間の有限版についての再考 (Finite version of Siegel upper half spaces revisited)」

概要 通常の上半平面の有限版は Terras のグループの仕事など良く知られている。またその高次元への拡張も色々試みられている。この講演では群論的立場からこれらの試みを概観する。特に Siegel 上半平面の有限版が何かという立場から考察する。 $Sp(2n, q)/GU(n, q)$  がそれであるということをしちんと示したい。講演までに終的な結果が示せるかどうか分からないが、すくなくとも問題提起と予想の部分だけでも意味があると思っている。この講演の内容は 2002 年に浜松で開催された 第 1 回保型形式周辺分野スプリングカンファレンスの報告集の私の原稿「Finite Geometry and an Analogue of Modular forms」の follow up とも言えるものです。

講演者 徳重 典英 (琉球大学)

タイトル 「組合せ論における半正定値計画法の応用」

概要 組合せ論における線形計画法や半正定値計画法の応用の具体例を紹介します。関連する未解決問題、文献、ソフトウェアについても触れたいと思います。

講演者 吉田 悠一 (国立情報学研究所)

タイトル 「ハイパーグラフの疎化とその周辺」

概要 ハイパーグラフの疎化とは、カットやエネルギーの値を  $1 \pm \varepsilon$  の近似精度で保ちながら、枝の数を削減する操作を指す。一般に、ハイパーグラフの枝数は頂点数の指数オーダーになるが、近年、これをほぼ線形個まで疎化できることが示された。その後、ハイパーグラフの拡張や他の計算モデルといったさまざまな設定でも、疎化が可能であることが明らかになっている。本講演では、これらの成果を概観する。

講演者 Subhasish Behera (Binayak Acharya College)

タイトル 「On the smallest positive eigenvalue of bipartite unicyclic graphs」 (オンライン講演)

概要 We study the smallest positive eigenvalue of bipartite unicyclic graphs with a unique perfect matching and characterize respective extremal graphs.

講演者 S. Balamoorthy (Central University of Tamil Nadu)

タイトル 「Eccentricity spectrum and irreducibility of  $H$ -join of graphs」 (オンライン講演)

概要 Let  $H$  be a simple undirected graph with  $|V(H)| = k$ . The  $H$ -join operation of the graphs  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , denoted by  $H[G_1, G_2, \dots, G_k]$ , is obtained by replacing the vertex  $i$  of  $H$  by the graph  $G_i$  for  $1 \leq i \leq k$  and every vertex of  $G_i$  is adjacent with every vertex of  $G_j$ , whenever  $i$  is adjacent to  $j$  in  $H$ . For a connected graph  $G$  and  $u, v \in V(G)$ , the distance between  $u$  and  $v$  in  $G$ , denoted by  $d_G(u, v)$ , is the length of a shortest path joining them in  $G$  and the eccentricity of  $u$ , denoted by  $e_G(u)$ , is defined as  $e_G(u) = \max\{d_G(u, v) : v \in V(G)\}$ . The radius of  $G$ , denoted by  $rad(G)$ , is the minimum eccentricity of all vertices of  $G$ . In this paper, we determine the eccentricity matrix of  $H$ -join of graphs in terms of some nice block matrices. Using this result, we obtain the following results.

- (i)  $Spec(\varepsilon(H[G]))$  in terms of  $Spec(\varepsilon(H))$  if the radius ( $rad(H)$ ) of  $H$  is at least three;
- (ii)  $Spec(\varepsilon(K_k[G_1, G_2, \dots, G_k]))$  if  $\Delta(G_i) \leq |V(G_i)| - 2$  which generalises some of the results in (Mahato et al. Spectra of eccentricity matrices of graphs. Discrete Appl Math. 285 (2020), 252–260).
- (iii)  $Spec(\varepsilon(H[G_1, G_2, \dots, G_k]))$  if  $rad(H) \geq 2$  and  $G_i$  is complete whenever  $e_H(i) = 2$ , which generalises some of the results in (Mahato et al. On the eccentricity matrices of trees: Inertia and spectral symmetry. Discrete Math. 345 (2022), 113067) and (Wang et al. Graph energy based on the eccentricity matrix. Discrete Math. 342(9) (2019), 2636–2646).

Also, we determine irreducibility of eccentricity matrix of  $H$ -join of graphs. Using irreducibility of the  $H$ -join, we obtain the irreducibility of the generalized corona product graphs, which generalize a main result in (Pandey, et al. Eccentricity matrix of corona of two graphs, Discrete Appl. Math. 359 (2024) 354-363). Finally, we determine the eccentricity matrix of the Cartesian product of two connected graphs. Using this result, we obtain the eccentricity spectrum of the Cartesian product of connected graph  $G$  and self-centered graph  $H$ . As a result, we find the spectrum of Hamming graph  $H(m, n)$  and hypercube  $Q_m$ . In addition, we find the necessary and sufficient conditions for the irreducibility of the eccentricity matrix of Cartesian product of two trees. Also, we obtain the necessary and sufficient conditions for the irreducibility of the Cartesian product of connected graph  $G$  and self-centered graph  $H$ .

講演者 川渕 晋哉 (熊本大学)

タイトル 「 $q$ -matroid の一次元拡張について」

概要 マトロイドの  $q$ -類似である  $q$ -マトロイドについて拡張と呼ばれる操作を導入し、より大きい  $q$ -マトロイドを得る手法を提案する。その後の展望として Steiner システムの  $q$ -類似である  $q$ -Steiner システム、特に  $q$ -Fano 平面の存在性に関する問題との関連について論じる。

講演者 Guillermo Nuñez Ponasso (東北大学)

タイトル 「Maximal determinants of matrices with entries over the roots of unity」

概要 Hadamard's maximal determinant problem involves finding the maximum possible determinant of a  $\pm 1$  square matrix. In this talk we will extend this problem to roots of unity, and focus on the especially interesting case of third roots of unity, discussing constructions based on symmetric designs, strongly regular graphs, and association schemes.

講演者 Jesse Lansdown (東北大学)

タイトル 「Some effects of vanishing Krein parameters on Delsarte designs」

概要 An association scheme may be thought of as a set of symmetric, 01-matrices  $A_0, \dots, A_d$  which sum to the all-ones matrix, and exhibit the following property

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^n p_{ij}^k A_k.$$

The constants  $p_{ij}^k$  are called intersection numbers and have corresponding dual parameters known as Krein parameters. Many interesting combinatorial objects may naturally be considered as subsets of vertices in a suitable association scheme. Of particular interest are Delsarte designs which are described by the eigenspaces of the association scheme. Combinatorial objects in an association scheme tend to be Delsarte designs when they are “optimal” in some sense, for example, independent sets yield Delsarte designs when the Hoffman bound is met. In this talk I will show how vanishing Krein parameters can sometimes be used to exclude or constrain Delsarte designs.