

Zeta Function of A Graph and Its Applications

Iwao Sato (Osaka National
College of Technology)

目次

I. 0. 始めに... 背景

1. 準備

1.1. グラフの Ihara セータ関数の定義

1.2. Ihara の定理

1.3. 一般グラフの Ihara セータ関数とその変形

1.4. グラフの Bartholdi セータ関数

2. digraph の weighted Bartholdi セータ関数
と Master Theorem

3. 応用.

3.1. digraph group covering の
weighted Bartholdi セータ関数

3.2. digraph の weighted Bartholdi L -関数

—目次—

Ⅱ. 1 グラフの第2種 weighted セータ関数

2. グラフの scattering matrix

2.1. グラフの scattering matrix

2.2. Smilanskyの定理の別証明

2.3. 半正則2部グラフの scattering matrix

2.4. Smilanskyの定理の weighted version

2.5. 第2種 weighted セータ関数のオイラー積

3. グラフの量子ウォークと遷移行列のスロートル問題

3.1. グラフ上の離散時間 Grover ウォーク

3.2. Grover 遷移行列のスロートル

3.3. Grover 遷移行列の positive support

3.4. Grover 遷移行列の2乗の positive support

3.5. グラフの遷移行列の3乗の positive support.

4. グラフ上の回え数量子ウォーク

4.1. 回え数行列の右固有値

4.2. Grover walk の回え数への拡張

4.3. グラフ上の回え数 Grover 遷移行列の右固有値

グラフのゼータ関数と その行列式表示

佐藤 巖 (小山工高専)

グラフ理論の立場から、グラフのゼータ関数へのアプローチ:

1. グラフのスペクトラムに関連して、ラマヌジャングラフ
2. $Z(G, u) = Z(H, u) \Rightarrow G \cong H$?
3. グラフのゼータ関数から決まる、グラフの性質
4. 隣接行列 etc による、グラフのゼータ関数の行列式表示.

0. 始めに、

グラフのゼータ関数は、次の論文

Y. Ihara: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p -adic fields, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 219-235

から、始まった。

- 1966年 Ihara: p -進体 F 上の $\mathrm{PGL}(2, F)$ のある離散群の共役類を数え上げるために、 p -進 Selberg ゼータ関数 (Ihara-Selberg ゼータ関数、簡単に、Ihara ゼータ関数) を定義。行列式表示を与える (Ihara の定理)。
- 1980年 Serre: Ihara ゼータ関数は、正則グラフのゼータ関数であることを指摘。
- 1986年 Sunada: Ihara ゼータ関数のグラフによる定義、Ihara の定理のグラフ理論的証明を与える。
- 1989年 Hashimoto: 半正則2部グラフの Ihara ゼータ関数の行列式表示を与える。

- 1990年 Hashimoto: 一般のグラフについて, *edge matrix* による Ihara セータ関数の行列式表示を与える。
- 1992年 Bass: 一般のグラフについて, *隣接行列* による Ihara セータ関数の行列式表示を与える。
- Bassの定理の別証明:
 - 1996年 Stark and Terras ... グラフ理論的
(ほぼ, Sunadaの方法)
 - 1998年 Northshield ... 整数論的
 - 1999年 Foata and Zeilberger ... 組合せ論的
 - 2000年 Kotani and Sunada ... 関数解析的
 - 2003年 Hoffman ... 代数的位相幾何学的
- 1999年 Bartholdi: 群の growth の研究に絡み、
2変数のグラフのセータ関数 (*Bartholdi セータ関数*)
を定義。行列式表示を与える。

⋮

 一種の *weighted* セータ関数

1. 準備.

1.1 グラフの Ihara ゼータ関数の定義.

リーマンのゼータ関数:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s = \sigma + it \in \mathbb{C})$$

その オイラー積:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (p: \text{素数})$$

リーマンのゼータ関数の類似するものを、グラフ上で考えるとき、

※ 無限級数で定義できない。

$$n=1, 2, 3, \dots \longleftrightarrow ?$$

※ オイラー積で定義される。

素数 $\longleftrightarrow$ prime, reduced cycles の同値類

$\longleftrightarrow$ ある離散群の原始的な作用類.

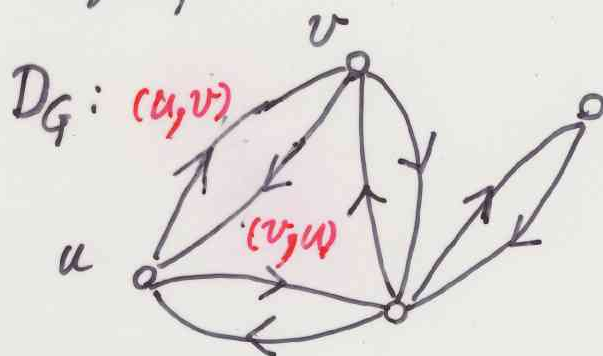
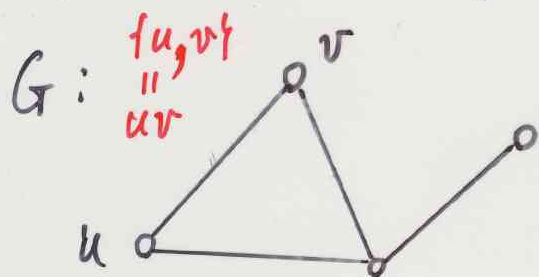


※ グラフのゼータ関数... そのような cycles の数え上げ

※ 与えられたグラフのゼータ関数: オイラー積で定義される。

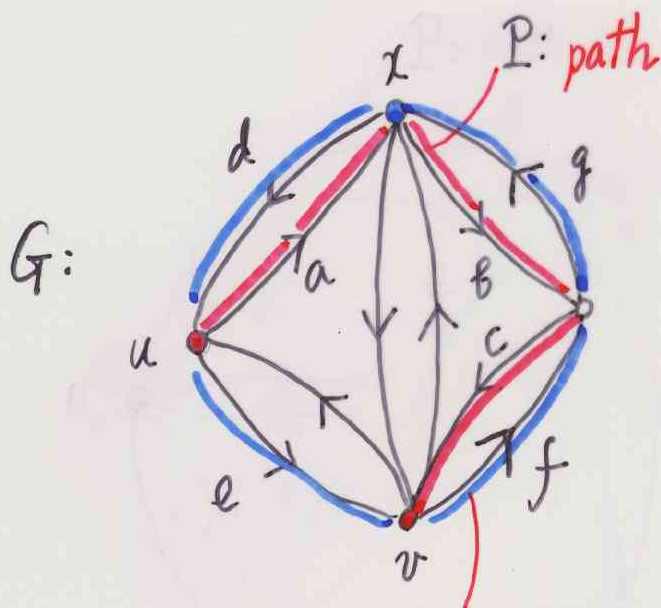
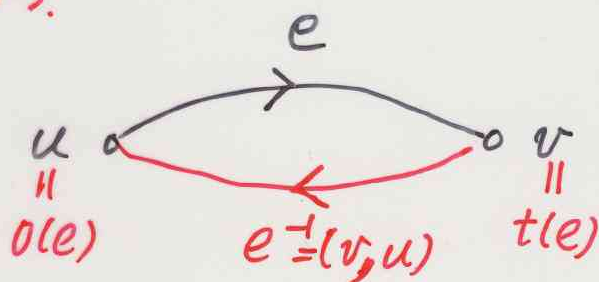
G : 有限(単純)連結グラフ

D_G : G に対応する symmetric digraph



$$D(G) = \{(u, v), (v, u) \mid uv \in E(G)\}$$

arc $e = (u, v) \in D(G)$ について.



P の長さ: $|P| = 3$.

$P = (a, b, c)$ と書く。

P : (u, v) -path

C : x -cycle

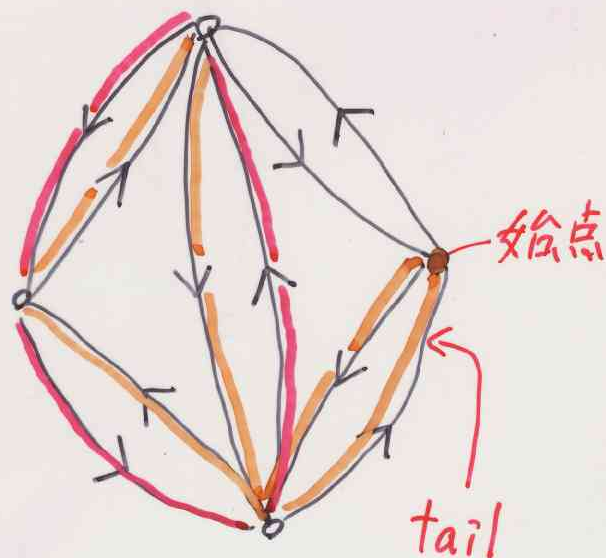
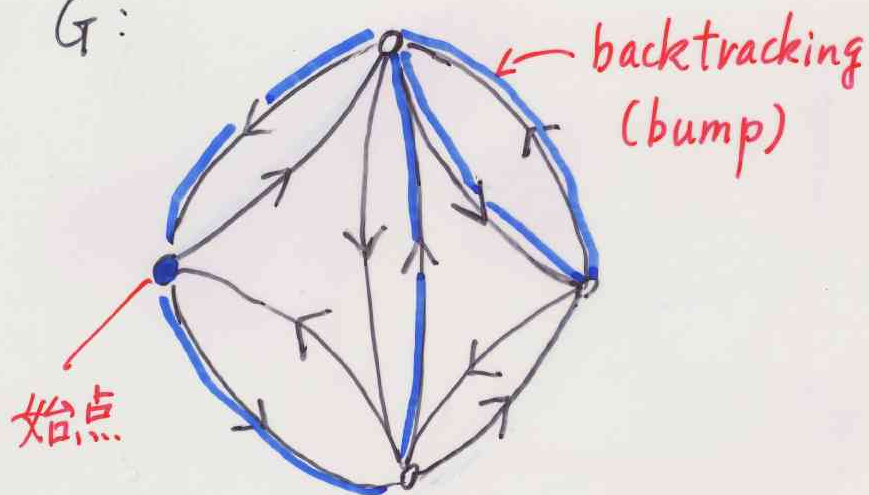
$C = (d, e, f, g)$

4つの cycles (d, e, f, g) , (e, f, g, d) , (f, g, d, e) ,

(g, d, e, f) : 同値

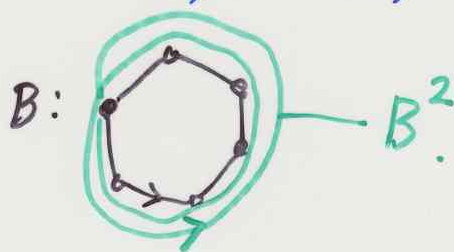
$[C]$: C を含む同値類

G:



cycle C : **reduced** ... $C \nsubseteq \text{backtracking} \ \& \ \text{tail}$.

cycle C : **prime** ... $C \neq B^r, \ \forall B(\text{cycle}) \ \& \ \forall r \geq 2$.



* グラフ G の prime, reduced cycles の同値類

$\longleftrightarrow$ 基本群 $\pi_1(G, v) (v \in V(G))$ の原始的な役類 !!

Def 1 (Sunada).

グラフ G の **Ihara ゼータ関数**:

$$Z(G, u) = \prod_{[C]} (1 - u^{|C|})^{-1}$$

($[C]$): G の prime, reduced cycles の同値類を動く.
 $u \in \mathbb{C}$: $|u| < 1$.

1.2. Ihara の定理

G : n 点 $v_1, \dots, v_n$ をもつ連結グラフ

G の隣接行列 $A(G) = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

点 v_i の次数 $\deg_G v_i$... v_i から出ている辺の個数

グラフ G : k -正則グラフ ... $\deg_G v = k, \quad \forall v \in V(G).$

$k \geq 1$ について.

N_k ... G の長さ k の reduced cycles の個数

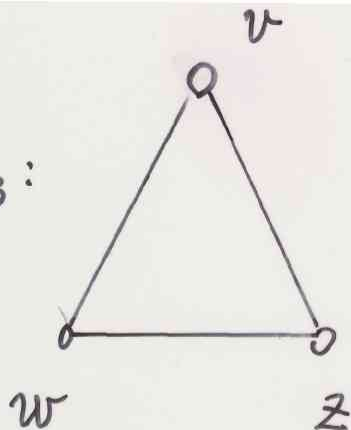
定理 1 (Ihara).

G : 連結 $(g+1)$ -正則グラフ, n 点, m 辺.

$$\begin{aligned} Z(G, u) &= (1-u^2)^{-(m-n)} \det(\mathbb{I}_n - uA(G) + gu^2\mathbb{I}_n)^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k\right). \end{aligned}$$

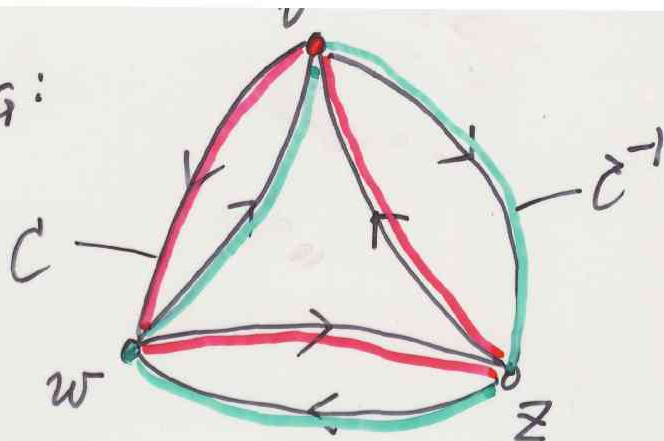
例.

$$G = K_3:$$



K_3 : 2-正則.

D_G :



G の prime, reduced cycles の同値類: $[C], [C^{-1}]$.

Ihara ゼータ関数の定義より.

$$Z(K_3, u)^{-1} = (1 - u^{|C|})(1 - u^{|C^{-1}|}) = (1 - u^3)^2$$

また. $A(K_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$

$$m = n = 3 \text{ \& } g = 1.$$

定理 1 より.

$$\begin{aligned} Z(K_3, u)^{-1} &= (1 - u^2)^{3-3} \det(\mathbb{I} - uA(G) + u^2\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1+u^2 & -u & -u \\ -u & 1+u^2 & -u \\ -u & -u & 1+u^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+u^2)^3 - 2u^3 - 3u^2(1+u^2) = (1-u^3)^2. \end{aligned}$$

さらに. $\exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k\right) = (1-u^3)^{-2}$ より.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k &= \log(1-u^3)^{-2} = 2\left(u^3 + \frac{u^6}{2} + \frac{u^9}{3} + \dots\right) \\ &= \frac{6}{3}u^3 + \frac{6}{6}u^6 + \frac{6}{12}u^9 + \dots \end{aligned}$$

$$N_3 = N_6 = N_9 = \dots = 6; N_k = 0 \text{ (} 3 \nmid k \text{)}.$$

1.3. 一般グラフの Ihara ゼータ関数とその変形

① 一般グラフの Ihara ゼータ関数.

G : n 点 $v_1, \dots, v_n$, m 辺をもつ連結グラフ

G の **次数行列** $D = (d_{ij})$:

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg_G v_i & \text{if } i=j, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

また、 $2m \times 2m$ 行列 $B = (B_{ef})_{e,f \in D(G)}$ & $J_0 = (J_{ef})_{e,f \in D(G)}$:

$$B_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$



$$J_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{if } f = e^{-1}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



$B - J_0$: G の **edge matrix**.

定理 2 (Hashimoto; Bass).

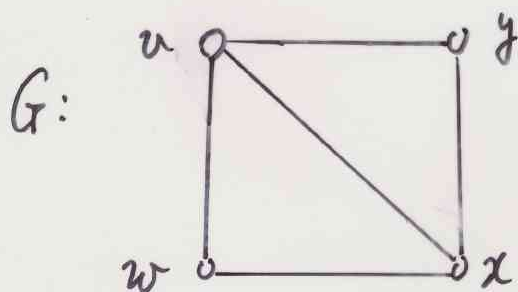
G : n 点, m 辺の連結グラフ.

$$\begin{aligned} Z(G, u) &= \det(I_{2m} - u(B - J_0))^{-1} \\ &= (1 - u^2)^{-(m-n)} \det(I_n - uA(G) + u^2(D - I_n))^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k\right). \end{aligned}$$

ここで、 N_k : G の長さ k の reduced cycles の個数.

※ 上記のグラフのゼータ関数は、edge matrix によって、行列式表示できる。

例



$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad ID = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定理 2 より、

$$\begin{aligned} Z(G, u)^{-1} &= (1-u^2)^{5-4} \det(\mathbb{I} - uA(G) + u^2(\mathbb{D} - \mathbb{I})) \\ &= (1-u^2) \begin{vmatrix} 1+2u^2 & -u & -u & -u \\ -u & 1+u^2 & -u & 0 \\ -u & -u & 1+3u^2 & -u \\ -u & 0 & -u & 1+2u^2 \end{vmatrix} \\ &= (1-u^2)(1-u)(1+u^2)(1+u+2u^2)(1-u^2-2u^3). \end{aligned}$$

故、

$$\sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k = 4u^3 + 2u^4 + 4u^6 + 4u^7 + \dots$$

$$N_3 = 12, N_4 = 8, N_5 = 0, N_6 = 24, N_7 = 28, \dots$$

②. グラフの weighted セータ関数

○ 1989年. Hashimotoにより、最初に、グラフの weighted セータ関数が定義された。

○ 1996年. Stark & Terras: edge セータ関数

○ 2004年. Mizuno & Sato: weighted セータ関数

G : 連結グラフ, n 点 & m 辺.

$D(G) = \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m}\}$ s.t. $e_{m+i} = e_i^{-1} (1 \leq i \leq m)$

$2m$ 個の複素数の組: $u = (u_1, \dots, u_{2m})$ を指定。

cycle $C = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ について、 $g(C) = u_{i_1} \cdots u_{i_k}$ とする。

I G の edge セータ関数 (Stark & Terras):

$$Z_G(u) = \prod_{[C]} (1 - g(C))^{-1}$$

($[C]$: G の prime, reduced cycles の同値類)

II $u_{m+i} = u_i (1 \leq i \leq m)$ のとき (Hashimoto).

$$Z_G(u) = \prod_{[C]} (1 - u^C)^{-1}, \quad u^C = g(C).$$

III $u_i = w(e_i)t (1 \leq i \leq 2m)$ のとき (Mizuno & Sato).

G の weighted セータ関数:

$$Z(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C)t^{|C|})^{-1}$$

$(C = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) : w(C) = w(e_{i_1}) \cdots w(e_{i_k}))$

定理3 (Stark & Terras).

G : m 辺をもつ連結グラフ.

$$S_G(u)^{-1} = \det(\mathbb{I}_{2m} - U(B - \mathbb{J}_0)) = \det(\mathbb{I}_{2m} - (B - \mathbb{J}_0)U).$$

$$\therefore U = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{2m} \end{pmatrix}.$$

定理4 (Mizuno & Sato).

G : 連結, n 点 & m 辺.

w : 交代的 or $w(e^{\uparrow}) = w(e)^{\uparrow}$ for $\forall e \in D(G)$ と仮定.

$$Z(G, w, t)^{-1} = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - tW(G) + t^2(\mathbb{D} - \mathbb{I}_n)).$$

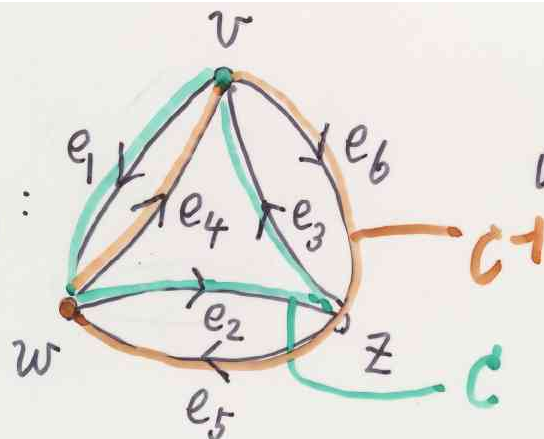
$\therefore G$ の weighted matrix $W(G) = (w_{xy})_{x, y \in V(G)}$:

$$w_{xy} = \begin{cases} w(x, y) & \text{if } (x, y) \in D(G), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

※ $w=1$ or $w(e)=1$ for $\forall e \in D(G) \Rightarrow$ 定理4から定理2が出る。

例

$G = K_3$:



$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6).$$

K_3 の prime, reduced cycles の同値類: $[C], [C^{-1}]$.

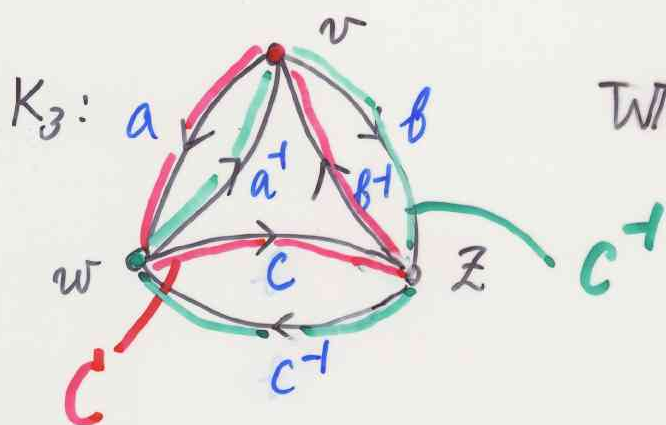
定義より, $\zeta_{K_3}(u)^{-1} = (1 - u^C)(1 - u^{C^{-1}}) = (1 - u_1 u_2 u_3)(1 - u_4 u_5 u_6)$.

一方, $B = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}$

定理 3 より,

$$\begin{aligned} \zeta_{K_3}(u)^{-1} &= \det(I_6 - U(B - J_0)) = \begin{vmatrix} 1 - u_1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 - u_2 & & & & \\ -u_3 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & -u_4 \\ & & & -u_5 & 1 & 0 \\ & & & 0 & -u_6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - u_1 u_2 u_3)(1 - u_4 u_5 u_6) \end{aligned}$$

次に、交代の加重 w を考える。



$$W(G) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a^{-1} & 0 & c \\ b^{-1} & c^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 2I_3$$

定義より、

$$Z(G, w, t)^{-1} = (1 - w(c)t^3)(1 - w(c^{-1})t^3) = (1 - ab^{-1}ct^3)(1 - a^{-1}bc^{-1}t^3)$$

また、定理4より、

$$Z(G, w, t)^{-1} = (1 - t^2)^{3-3} \det(I_3 - tW(G) + t^2I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1+t^2 & -at & -bt \\ -a^{-1}t & 1+t^2 & -ct \\ -b^{-1}t & -c^{-1}t & 1+t^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+t^2)^3 - ab^{-1}ct^3 - a^{-1}bc^{-1}t^3 - 3t^2(1+t^2)$$

$$= (1 - ab^{-1}ct^3)(1 - a^{-1}bc^{-1}t^3)$$

- Remark -

※ w : 交代的 $\Rightarrow Z(G, w, t)$: weighted matrix で
行列式表示可能.

これから.

edge セータ関数 $Z_G(u)$ は, どんな重み u について,

G の位数 (点の個数) 次の行列で, 行列式表示可能か?

という問題が考えられる。

2009 年. Watanabe & Fukumizu によって,

G の位数 次の行列で, 行列式表示できる

ことが示された。

但し, この行列は, weighted matrix ではない!!

1.4. グラフの Bartholdi セータ関数.

G : 連結グラフ,

G の cycle $C = (e_1, \dots, e_n)$ の *cyclic bump count*:

$cbc(C)$ --- C の backtracking, tail の個数.

Def 2

グラフ G の Bartholdi セータ関数:

$$\zeta(G, u, t) = \prod_{[C]} (1 - u^{cbc(C)} t^{|C|})^{-1}.$$

ここで, $[C]$: G の prime cycles の同値類を動く.

$u, t \in \mathbb{C}$: $|u|, |t| < 1$ 十分小.

* $u=0$ のとき. $\zeta(G, 0, t) = Z(G, t).$

$$\zeta(G, u, t) = \prod_{[C_1]} (1 - u^{cbc(C_1)} t^{|C_1|})^{-1} \cdot \prod_{[C]} (1 - u^0 t^{|C|})^{-1}$$

$\uparrow$
 prime, nonreduced
 cycles の同値類

$\uparrow$
 prime, reduced cycles
 の同値類

$u=0$ 代入

$$\therefore \zeta(G, 0, t) = \prod_{[C]} (1 - t^{|C|})^{-1} = Z(G, t). //$$

Bartholdi によつて, Bartholdi ゼータ関数の行列式表示が与えられた。

定理 5 (Bartholdi).

G : n 点, m 辺をもつ連結グラフ.

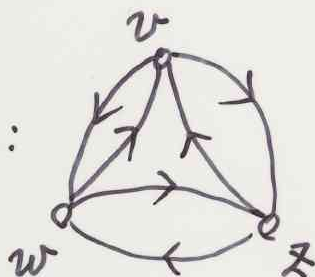
$$\zeta(G, u, t)^{-1} = \det(I_{2m} - t(B - (1-u)J_0))$$

$$= (1 - (1-u)^2 t^2)^{m-n} \det(I_n - tA(G) + (1-u)t^2(D - (1-u)I_n))$$

※ $u=0$ のとき, 定理 5 から, 定理 2 が得られる。

例

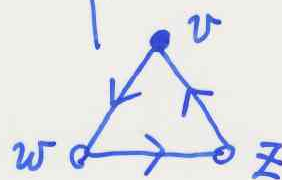
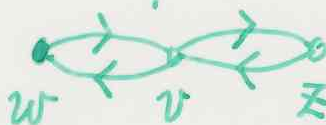
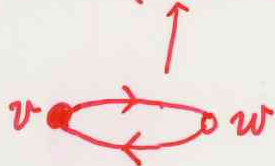
$G = K_3$:



$$A(K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

定義から,

$$\zeta(K_3, u, t)^{-1} = \dots (1 - u^2 t^2) \dots (1 - u^2 t^4) \dots (1 - t^3) \dots \text{(無限積)}$$



定理 5 より

$$\begin{aligned} \zeta(K_3, u, t)^{-1} &= (1 - (1-u)^2 t^2)^{3-3} \det(I - tA(K_3) + (1-u)t^2 \cdot (I + u)I) \\ &= \begin{vmatrix} 1 + (1-u^2)t^2 & -t & -t \\ -t & 1 + (1-u^2)t^2 & -t \\ -t & -t & 1 + (1-u^2)t^2 \end{vmatrix} \\ &= (1 + (1-u^2)t^2)^3 - 3t^2(1 + (1-u^2)t^2) - 2t^3 \end{aligned}$$

2. digraphのweighted Bartholdiゼータ関数 と Master Theorem.

D : 連結 digraph, n 点 & m arcs,

$$V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

$n \times n$ 行列 $W(D) = (w_{ij})$:

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{複素数} \neq 0 & \text{if } (v_i, v_j) \in A(D), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$W(D)$: D の weighted matrix.

$$\begin{cases} w(v_i, v_j) = w_{ij}, v_i, v_j \in V(D) \\ w(e) = w_{ij}, e = (v_i, v_j) \in A(D) \end{cases} \quad \text{と書く。}$$

D の path $P = (e_1, \dots, e_n)$ について

$$w(P) = w(e_1) \cdots w(e_n).$$

Def 3 (Choe, Kwak, Park & Sato).

digraph D の weighted Bartholdiゼータ関数:

$$\zeta(D, w, u, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C) u^{c(C)} t^{|C|})^{-1}.$$

$z \in \mathbb{C}$: $[C]$: D の prime cycles の同値類を動かす。

$u, t \in \mathbb{C}$: $|u|, |t|$ が十分小。

・X・ $\zeta(D, w, u, t)$ から得られるゼータ関数.

	グラフ $G (D = D_G)$	digraph D
$w=1$	$\zeta(G, u, t) = \prod_{[C]} (1 - u^{cb(C)} t^{ C })^{-1}$ (G の Bartholdi ゼータ関数)	$\zeta(D, u, t) = \prod_{[C]} (1 - u^{cb(C)} t^{ C })^{-1}$ (D の Bartholdi ゼータ関数) [Mizuno & Sato]
$w=1, u=0$	$Z(G, t) = \prod_{[C]} (1 - t^{ C })^{-1}$ (G の Ihara ゼータ関数)	$\zeta(D, t) = \prod_{[C]} (1 - t^{ C })^{-1}$ (D の Ihara ゼータ関数) [Tarfulea & Perlis]
$w=1, u=1$		$Z(D, t) = \prod_{[C]} (1 - t^{ C })^{-1}$ (D の ゼータ関数) [Bowen & Lanford; Kotani & Sunada]
$u=1$		$Z(D, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C) t^{ C })^{-1}$ (D の weighted ゼータ関数) [Mizuno & Sato]
$u=0$	$Z(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C) t^{ C })^{-1}$ (G の weighted ゼータ関数)	
w, u 条件なし	$\zeta(G, w, u, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C) u^{cb(C)} t^{ C })^{-1}$ (G の weighted Bartholdi ゼータ関数) [Sato]	$\zeta(D, w, u, t)$ (D の weighted Bartholdi ゼータ関数)

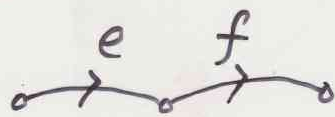
— $\{(D, w, u, t)$ の行列式表示 —

D : 連結 digraph, n 点 & m arcs, $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$,

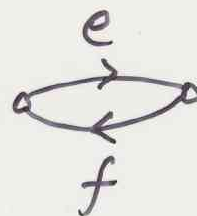
m_1 : D の symmetric arcs の個数の $\frac{1}{2}$.

$m \times m$ 行列 $B_w = (B_{e,f})_{e,f \in A(D)}$ & $J_{0,w} = (J_{e,f})_{e,f \in A(D)}$:

$$B_{e,f} = \begin{cases} w(e) & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$



$$J_{e,f} = \begin{cases} w(e) & \text{if } f = e^{-1}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



$n \times n$ 行列 $W_1^{(1)}(D) = (w_{xy}^{(1)})$:

$$w_{xy}^{(1)} = \begin{cases} w(x,y) & \text{if } (x,y): \text{symmetric arc,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$$W_0(D) = W(D) - W_1(D).$$

さらに, $n \times n$ 対角行列 $S = (s_{ij})$:

$$s_{ii} = |\{ e \in A(D) \mid o(e) = v_i, e^{-1} \in A(D) \}|$$

$\uparrow$
 v_i から出る symmetric arcs の個数

Choe, Kwak, Park & Sato: Bartholdi zeta and L-functions of weighted digraphs, their coverings and products, Adv. Math. 213 (2007), 865-886
 によって、digraphのweighted Bartholdi ゼータ関数の行列式表示が与えられた。

定理 6 (Master Theorem) [Choe, Kwak, Park & Sato]

D : n 点, m arcs の連結 digraph,

$W(D)$: D の weighted matrix

$$\zeta(D, w, u, t)^{-1} = \det(\mathbb{I}_m - t(B_w - (1-u)J_{0,w})).$$

また、 w : symmetric arc について 交代制

or $w(e^{-1}) = w(e)^{-1}$ for $\forall$ symmetric arc e ならば、

$$\zeta(D, w, u, t)^{-1} = (1 - (1-u)^2 t^2)^{m-n}$$

$$\times \det(\mathbb{I}_n - tW_1(D) - (1 - (1-u)^2 t^2)tW_0(D) + (1-u)t^2(S - (1-u)\mathbb{I}_n))$$

定理 6 から、上記 8 つのゼータ関数の行列式表示が得られる。

※ $D = D_G$ のとき、 G の weighted Bartholdi ゼータ関数:

w : 交代制ならば、

$$\zeta(G, w, u, t)^{-1} = (1 - (1-u)^2 t^2)^{m-n}$$

$$\times \det(\mathbb{I}_n - tW(G) + (1-u)t^2(D - (1-u)\mathbb{I}_n)).$$

※ $w=1$ のとき、 D の Bartholdi ゼータ関数:

w : symmetric arc について交代制ならば、

$$\zeta(D, u, t)^{-1} = (1 - (1-u)^2 t^2)^{m_1 - n}$$

$$\times \det(\mathbb{I}_n - t A_1(D) - (1 - (1-u)^2 t^2) t A_0(D) + (1-u) t^2 (\mathbb{I}_n - (1-u) \mathbb{I}_n))$$

※ $w=1$ & $D=D_G$ のとき、 G の Bartholdi ゼータ関数: 定理 5.

※ $w=1, u=0$ & $D=D_G$ のとき、 G の Ihara ゼータ関数: 定理 2.

※ $w=1$ & $u=1$ のとき、 D の ゼータ関数:

$$Z(D, t)^{-1} = \det(\mathbb{I}_m - t B) = \det(\mathbb{I}_n - t A(D))$$

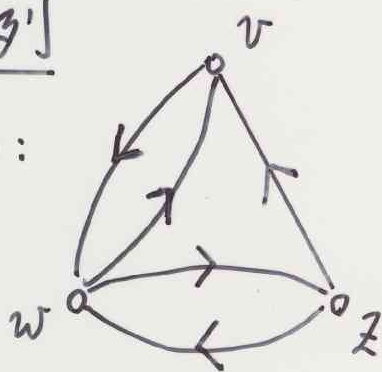
※ $u=1$ のとき、 D の weighted ゼータ関数:

$$Z(D, w, t)^{-1} = \det(\mathbb{I}_m - t B_w) = \det(\mathbb{I}_n - t W(D))$$

※ $u=0$ & $D=D_G$ のとき、 G の weighted ゼータ関数: 定理 4.

例 13)

D:



$$W(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^{-1} & 0 & b \\ c & b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$n=3, m=5, m_1=2.$$

$$W_1(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^{-1} & 0 & b \\ 0 & b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad W_0(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad S = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定理 6 より、

$$\zeta(D, w, u, t)^{-1} = (1 - (1-u)^2 t^2)^{2-3}$$

$$\times \det(\mathbb{I}_3 - t W_1(D) - (1 - (1-u)^2 t^2) t W_0(D) + (1-u) t^2 (S - (1-u) \mathbb{I}_3))$$

$$= (1 - (1-u)^2 t^2)^{-1} \begin{vmatrix} 1 + (1-u) u t^2 & -a t & 0 \\ -a^{-1} t & 1 + (1-u)^2 t^2 & -b t \\ -(1 - (1-u)^2 t^2) t c & -b^{-1} t & 1 + (1-u) u t^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - a b c t^3.$$

3. 応用

グラフの正則被覆グラフ (regular covering) or Γ -被覆 (Γ -covering) を、digraph に拡張する。

D : 連結 digraph, Γ : 有限群.

POVA

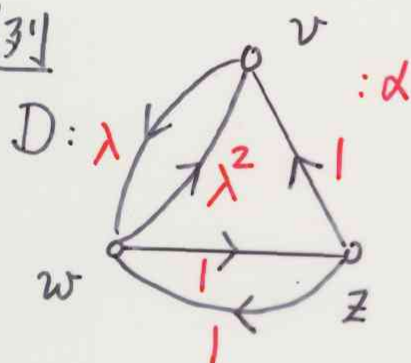
$\alpha: A(D) \rightarrow \Gamma$ (pseudo ordinary voltage assignment)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha(v, u) = \alpha(u, v)^{-1}, \forall \text{ symmetric arc } (u, v).$

D の Γ -covering D^α :

$$\begin{cases} V(D^\alpha) = V(D) \times \Gamma, \\ ((u, g), (v, h)) \in A(D^\alpha) \stackrel{\text{def}}{\iff} (u, v) \in A(D) \& h = g\alpha(u, v). \end{cases}$$

例

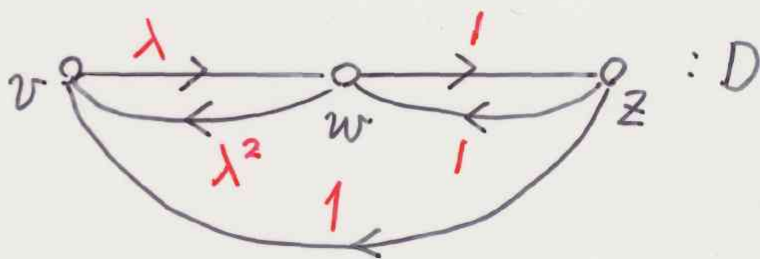
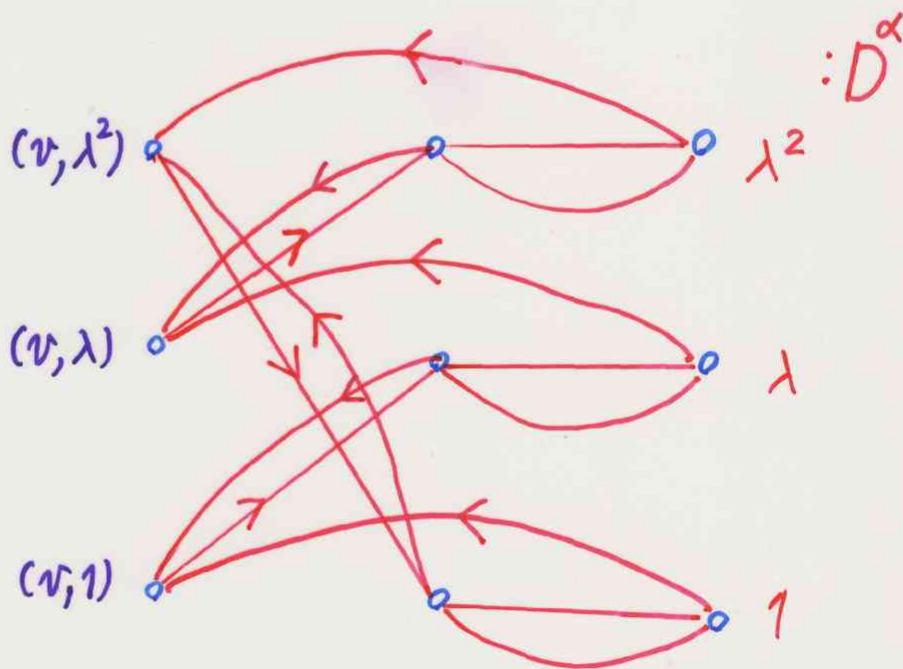


$$\Gamma = \mathbb{Z}_3 = \{1, \lambda, \lambda^2\}$$

$$(\lambda^3 = 1)$$

$$((v, g), (w, h)) \in A(D^\alpha)$$

$$\iff h = g\alpha(v, w) = g\lambda$$



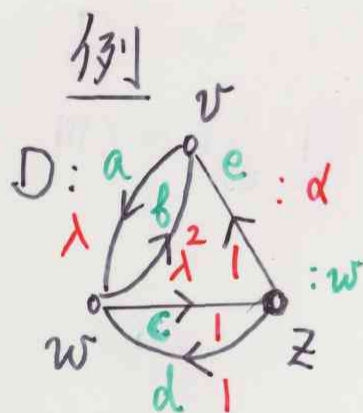
* Γ ならば G の symmetric digraph の Γ -covering : G の Γ -covering.

D^α において. $v_g = (v, g), e_g = (e, g), v \in V(D), e \in A(D), g \in \Gamma$
 とおく。

$W(D)$: D の weighted matrix,

$W(D)$ から. 誘導される D^α の weighted matrix $W(D^\alpha) = (\tilde{w}(u_g, v_h))$:

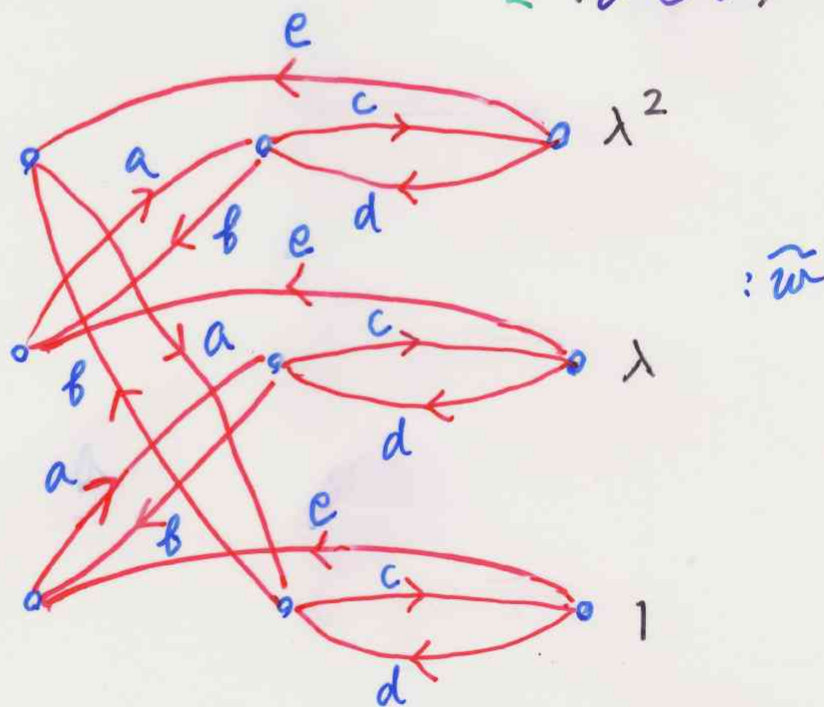
$$\tilde{w}(u_g, v_h) = \begin{cases} w(u, v) & \text{if } (u, v) \in A(D) \text{ \& } h = g \alpha(u, v), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



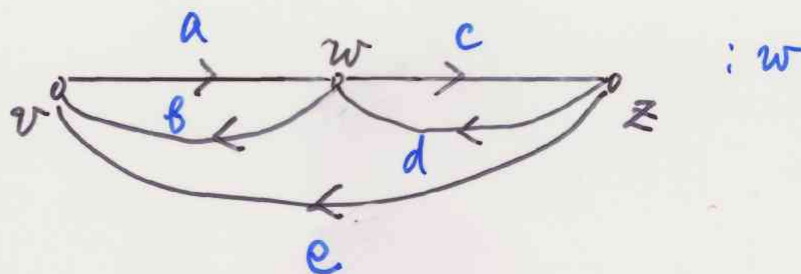
$\Gamma = \mathbb{Z}_3 = \{1, \lambda, \lambda^2\}, (\lambda^3 = 1)$

$W(D) = \begin{matrix} & v & w & z \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ d & e & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$

D^α :



D :



$$W(D^\alpha) = \begin{array}{c} (v,1) \\ (w,1) \\ (z,1) \\ (v,\lambda) \\ (w,\lambda) \\ (z,\lambda) \\ (v,\lambda^2) \\ (w,\lambda^2) \\ (z,\lambda^2) \end{array} \begin{array}{c} (v,1) (w,1) (z,1) \\ (v,\lambda) (w,\lambda) (z,\lambda) \\ (v,\lambda^2) (w,\lambda^2) (z,\lambda^2) \end{array} \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_\lambda} \otimes \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_{\lambda^2}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑
クロネッカー積

λの permutation matrix

3.1. digraph の group covering の weighted Bartholdi ゼータ関数

定理 6 から, digraph D の Γ -covering の weighted Bartholdi
ゼータ関数の行列式表示を導く。

D : 連結 digraph, n 点 & m arcs, Γ : 有限群,

d : DOVA, $W(D)$: D の weighted matrix.

ρ : Γ の表現 & $d = \deg \rho$: ρ の次数.

(e, f) -ブロック
 $d \times d$ 行列

$m d \times m d$ 行列 $B_\rho = ((B_\rho)_{ef})_{e, f \in A(D)}$ & $J_\rho = ((J_\rho)_{ef})_{e, f \in A(D)}$:

$$(B_\rho)_{ef} = \begin{cases} w(e) \rho(\alpha(e)) & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0_d & \text{その他,} \end{cases}$$

$$(J_\rho)_{ef} = \begin{cases} w(e) \rho(\alpha(e)) & \text{if } f = e^{-1}, \\ 0_d & \text{その他.} \end{cases}$$

また, $g \in \Gamma$ について, $n \times n$ 行列 $W_{0,g} = (a_{uv}^{(g)})$ & $W_{1,g} = (b_{uv}^{(g)})$:

$$a_{uv}^{(g)} = \begin{cases} w(u, v) & \text{if } (u, v) \in A(D), (v, u) \notin A(D) \text{ \& } \alpha(u, v) = g, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$b_{uv}^{(g)} = \begin{cases} w(u, v) & \text{if } (u, v) \& (v, u) \in A(D) \text{ \& } \alpha(u, v) = g, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

定理6より

定理7 (Choe, Kwak, Park & Sato).

D : 連結 digraph, n 点 & m arcs.

$\rho_1=1, \rho_2, \dots, \rho_k: \Gamma$ の既約表現 & $f_i = \deg \rho_i (1 \leq i \leq k)$

$$\zeta(D^\alpha, \tilde{w}, u, t)^{-1} = \zeta(D, w, u, t)^{-1} \\ \times \prod_{i=2}^k \det(\mathbb{I}_{mf_i} - (B_\rho - (1-u)J_\rho)t)^{f_i}$$

さらに、 w : symmetric arcs に関する交代式的

つまり、 $w(e^{-1}) = w(e)^{-1}$, $\forall$ symmetric arc $e \in A(D)$
ならば、

$$\zeta(D^\alpha, \tilde{w}, u, t)^{-1} = \zeta(D, w, u, t)^{-1} \\ \times \prod_{i=2}^k \left\{ (1 - (1-u)^2 t^2)^{(m_i - n) f_i} \det(\mathbb{I}_{nf_i} - t \sum_{g \in \Gamma} \rho_i(g) \otimes W_{1,g} \right. \\ \left. - (1 - (1-u)^2 t^2) t \sum_{g \in \Gamma} \rho_i(g) \otimes W_{0,g} + (1-u) t^2 (\mathbb{I}_{f_i} \otimes (S - (1-w)\mathbb{I}_n))) \right\}^{f_i}$$

3.2. digraph の weighted Bartholdi L-関数.

digraph D の group covering の weighted Bartholdi セータ関数を D の weighted Bartholdi L-関数の積で表す。

D : 連結 digraph, n 点 & m arcs, Γ : 有限群,

$\alpha: A(D) \rightarrow \Gamma(\text{POVA})$, $W(D)$: D の weighted matrix.

D の path $P = (e_1, \dots, e_r)$ について.

$$\alpha(P) = \alpha(e_1) \cdots \alpha(e_r)$$

とおく。

また、 $\rho: \Gamma$ の (ユニタリ) 表現 & $d = \deg \rho$.

Def 4.

D の ρ と α に関する weighted Bartholdi L-関数:

$$\mathcal{S}_D(w, u, t, \rho, \alpha) = \prod_{[C]} \det(\mathbb{I}_{nd} - w(C) \rho(\alpha(C)) u^{cb(C)} t^{|C|})^{-1}.$$

ここで、 $[C]$: D の prime cycles の同値類を動かす。

これから、

I $w = \mathbb{1}$ のとき、 D の Bartholdi L-関数 [Mizuno & Sato]:

$$\mathcal{S}_D(\mathbb{1}, u, t, \rho, \alpha) = \mathcal{S}_D(u, t, \rho, \alpha) = \prod_{[C]} \det(\mathbb{I} - \rho(\alpha(C)) u^{cb(C)} t^{|C|})^{-1}.$$

II $D = D_G$ のとき、 G の weighted Bartholdi L -関数 [Sato]:

$$\begin{aligned} \zeta_D(w, u, t, p, \alpha) &= \zeta_G(w, u, t, p, \alpha) \\ &= \prod_{[C]} \det(\mathbb{I} - w(c)p(\alpha(c))u^{cb(c)}t^{|C|})^{-1}. \end{aligned}$$

III $D = D_G$ & $u = 0$ のとき、 G の weighted L -関数 [Mizuno & Sato]:

$$\zeta_D(w, 0, t, p, \alpha) = Z_G(w, t, p, \alpha) = \prod_{[C]} \det(\mathbb{I} - w(c)p(\alpha(c))t^{|C|})^{-1}.$$

IV $w = \mathbb{1}$ & $D = D_G$ のとき、 G の Bartholdi L -関数 [Mizuno & Sato]:

$$\zeta_D(\mathbb{1}, u, t, p, \alpha) = \zeta_G(u, t, p, \alpha) = \prod_{[C]} \det(\mathbb{I} - p(\alpha(c))u^{cb(c)}t^{|C|})^{-1}.$$

V $D = D_G$, $w = \mathbb{1}$ & $u = 0$ のとき、 G の Ihara L -関数 [Ihara]:

$$\zeta_D(\mathbb{1}, 0, t, p, \alpha) = Z_G(t, p, \alpha) = \prod_{[C]} \det(\mathbb{I} - p(\alpha(c))t^{|C|})^{-1}.$$

Choe, Kwak, Park & Sato により、 D の p と α に関する weighted Bartholdi L -関数の行列式表示が与えられた。

定理 8 (Choe, Kwak, Park & Sato)

D : 連結 digraph, n 点 & m arcs,

Γ : 有限群, $d: A(D) \rightarrow \Gamma(\text{POVA})$,

$W(D)$: D の weighted matrix

ρ : Γ の表現 & $d = \deg \rho$.

$$\zeta_D(w, u, t, \rho, \alpha)^{-1} = \det(\mathbb{I}_{md} - t(B_\rho - (1-u)J_\rho)).$$

また, $w(e^{-1}) = w(e)^{-1}$, $\forall$ symmetric arc $e \in A(D)$

ならば、

$$\begin{aligned} \zeta_D(w, u, t, \rho, \alpha)^{-1} &= (1 - (1-u)^2 t^2)^{(m_1-n)d} \det(\mathbb{I}_{nd} - t \sum_{g \in \Gamma} \rho(g) \otimes W_{1,g} \\ &\quad - (1 - (1-u)^2 t^2) t \sum_{g \in \Gamma} \rho(g) \otimes W_{0,g} + (1-u) t^2 (\mathbb{I}_d \otimes (S - (1-u) \mathbb{I}_n))). \end{aligned}$$

定理 7, 8 より, D の group covering の weighted Bartholdi ゼータ関数の, D の weighted Bartholdi L -関数による分解公式が得られる。

Cor 1 (Choe, Kwak, Park & Sato)

$$\zeta(D^\alpha, \tilde{w}, u, t) = \prod_{\rho} \zeta_D(w, u, t, \rho, \alpha)^{\deg \rho}.$$

ここで, ρ は Γ の同値でない既約表現を動く。

$w=1$ のとき. digraph の group covering の Bartholdi ゼータ関数の分解公式:

Cor 2 (Sato).

$$\zeta(D^\alpha, u, t) = \prod_p \zeta_D(u, t, p, \alpha)^{\deg p}.$$

$D=D_G$ のとき. グラフの regular covering の weighted Bartholdi ゼータ関数の分解公式:

Cor 3 (Sato).

$$\zeta(G^\alpha, \tilde{w}, u, t) = \prod_p \zeta_G(u, t, p, \alpha)^{\deg p}.$$

$D=D_G$ & $u=0$ のとき. グラフの regular covering の weighted ゼータ関数の分解公式:

Cor 4 (Mizuno & Sato).

$$Z(G^\alpha, \tilde{w}, t) = \prod_p Z_G(w, t, p, \alpha)^{\deg p}.$$

$w=1$ & $D=D_G$ のとき. グラフの regular covering の Bartholdi ゼータ関数の分解公式:

Cor 5 (Mizuno & Sato).

$$\zeta(G^\alpha, u, t) = \prod_p \zeta_G(u, t, p, \alpha)^{\deg p}.$$

$D = D_G$, $w = 1$ & $u = 0$ のとき. グラフの regular covering の

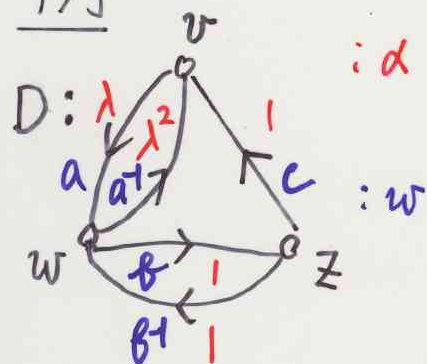
Ihara セータ関数の分解公式:

Cor 6 (Hashimoto).

$$Z(G^\alpha, t) = \prod_p Z_G(t, p, \alpha)^{\deg p}$$

Cor 6 は. Stark & Terras, Mizuno & Sato によっても得られている。

例



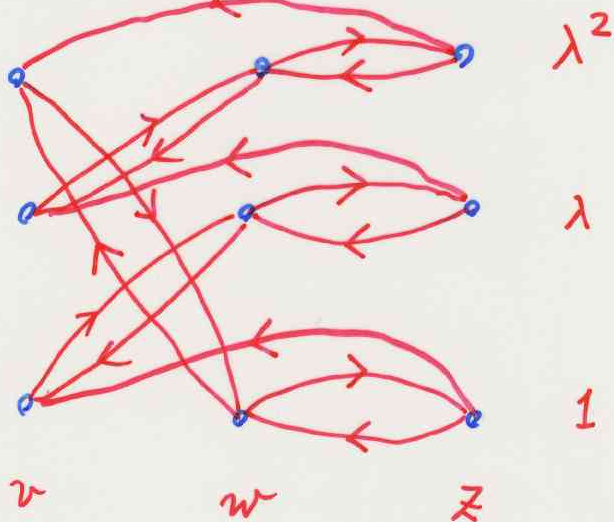
$$W/(D) = \begin{matrix} & v & w & z \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^{-1} & 0 & b \\ c & b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$n=3, m=5, m_1=2.$$

w : symmetric arcs について
交代制.

$$\Gamma = \mathbb{Z}_3 = \{1, \lambda, \lambda^2\}$$

D^α :



先づ.

$$J(D, w, u, t)^{-1} = 1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - abct^3.$$

次に.

$\mathbb{Z}_3$ の既約表現 (character): $\chi_i(\lambda^j) = (\xi^i)^j$ ($0 \leq i, j \leq 2$),

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$W_{1,1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad W_{1,\lambda} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad W_{1,\lambda^2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$W_{0,1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad W_{0,\lambda} = W_{0,\lambda^2} = \mathbb{O}_3. \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 8 より.

$$\begin{aligned} \zeta_D(w, u, t, \chi_1, \alpha)^{-1} &= (1 - (1-u)^2 t^2)^{2-3} \det \left(\mathbb{I} - t \sum_{i=0}^2 \chi_1(\lambda^i) W_{1,\lambda^i} \right. \\ &\quad \left. - (1 - (1-u)^2 t^2) t \sum_{i=0}^2 \chi_1(\lambda^i) W_{0,\lambda^i} + (1-u) t^2 (S - (1-u) \mathbb{I}) \right) \\ &= (1 - (1-u)^2 t^2)^{-1} \begin{vmatrix} 1 + (1-u) u t^2 & -a \xi t & 0 \\ -a^{-1} \xi^2 t & 1 + (1-u^3) t^2 & -b t \\ -(1 - (1-u)^2 t^2) c t & -b^{-1} t & 1 + (1-u) u t^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - abc t^3 \xi. \end{aligned}$$

同様に.

$$\zeta_D(w, u, t, \chi_2, \alpha)^{-1} = 1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - abc t^3 \xi^2.$$

Cor 1 より.

$$\begin{aligned} \zeta(D^\alpha, \tilde{w}, u, t)^{-1} &= \zeta(D, w, u, t)^{-1} \zeta_D(w, u, t, \chi_1, \alpha)^{-1} \zeta_D(w, u, t, \chi_2, \alpha)^{-1} \\ &= (1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - abc t^3 \xi) (1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - abc t^3 \xi^2) \\ &\quad \times (1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4 - abc t^3 \xi^2) \\ &= (1 - 2u^2 t^2 + (u^4 - u^2) t^4)^3 - a^3 b^3 c^3 t^9. \end{aligned}$$

4. 今後の課題

I グラフの weighted セータ関数

定理 4 より、次が成り立つかも知れない。

予想 1. $Z(G, w, t)$ が weighted matrix $W(G)$ で行列式表示できるための必要十分条件は、 w : 交代制。

II digraph の weighted Bartholdi セータ関数

定理 6 より、 w : symmetric arcs について交代制ならば、 $\zeta(D, w, u, t)$ は weighted matrix $W(D)$ で行列式表示ができる。その逆について。

予想 2. $\zeta(D, w, u, t)$ が $W(D)$ で行列式表示できるための必要十分条件は、 w が symmetric arcs について交代制である。

w が symmetric arcs について、交代制でないとき、次が考えられる。

問題 1. $\zeta(D, w, u, t)$ が D の位数次の行列で行列式表示可能な重み $w(e)$ ($e \in A(D)$) を特徴付けよ。

Ⅳ その他.

Oren, Godel & Smilansky や, Mizuno & Sato により, グラフ, digraph の別種, weighted Bartholdi セータ関数が提案されている。

問題 2. $\{D, w, u, t\}$ 以外に, グラフ, digraph について, 他にどんな weighted セータ関数があるか。

Storm や Sato により, hypergraph の Ihara セータ関数, Bartholdi セータ関数が定式化され, それらの行列式表示が与えられた。

これに関して,

問題 3. 1.3 節の weighted セータ関数と異なる (例えば, arc に重みを与えるもの以外), グラフ, digraph のセータ関数も, 包含する, hypergraph の多変数のセータ関数を見つけよ。



II グラフの第2種 weighted ゼータ 関数とその応用

佐藤 巖 (小山工高専)

1. グラフの2種 weighted ゼータ関数

先程の G の weighted ゼータ関数... 第1種 weighted ゼータ関数

G : 連結, n 点 & m 辺.

$n \times n$ 行列 $W(G) = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$ (G の weighted matrix):

$$w_{uv} = \begin{cases} \text{複素数} \neq 0 & \text{if } (u,v) \in D(G), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$w(u,v) = w_{uv}, u,v \in V(G); w(e) = w_{uv}, e = (u,v) \in D(G)$
と書く。

$2m \times 2m$ 行列 $B_w = (B_{ef}^{(w)})_{e,f \in D(G)}$:

$$B_{ef}^{(w)} = \begin{cases} w(f) & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

G の 2種 weighted ゼータ関数:

$$Z_1(G, w, t) = \det(\mathbb{I}_{2m} - t(B_w - \mathbb{J}_0))^{-1}.$$

* $w = \mathbb{1} \Rightarrow Z_1(G, \mathbb{1}, t) = Z(G, t)$ (Ihara ゼータ関数)

* 一部定理より, 第1種 weighted ゼータ関数について,

$$Z_1(G, w, t) = \det(\mathbb{I}_{2m} - t \mathbb{U}(B - \mathbb{J}_0))^{-1}$$

がわかる。

定理1 (Sato).

G : n 点, m 辺連結グラフ.

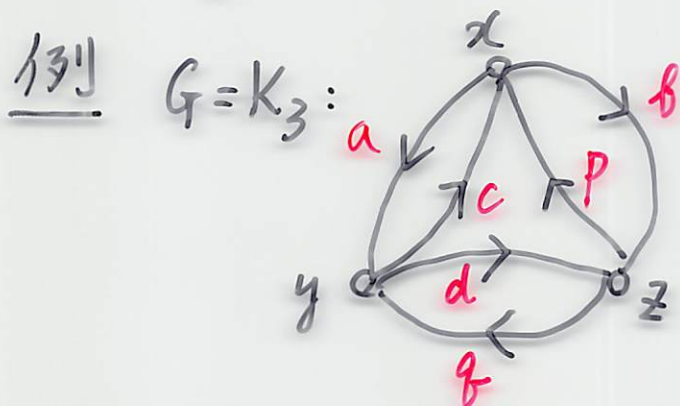
$$Z_1(G, w, t)^{-1} = (1-t^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - tW(G) + t^2(D_w - \mathbb{I}_n))$$

ここで: $D_w = (d_{uv})_{u,v \in V(G)}$: $n \times n$ 対角行列 s.t.

$$d_{uu} = \sum_{o(e)=u} w(e).$$

* w に交代性は仮定していい!!

* $Z(G, w, t)^{-1} = (1-t^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - tW(G) + t^2(D - \mathbb{I}_n))$
(定理4)



$$W(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ p & g & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定理1より.

$$\begin{aligned} Z_1(G, w, t)^{-1} &= (1-t^2)^{3-3} \det(\mathbb{I}_3 - tW(G) + t^2(D_w - \mathbb{I}_3)) \\ &= \begin{vmatrix} 1+(a+b-1)t^2 & -at & -bt \\ -ct & 1+(c+d-1)t^2 & -dt \\ -pt & -gt & 1+(p+g-1)t^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 + (\alpha + \beta + \gamma - bp - ac - dg)t^2 - (adp + bcg)t^3 \\ &\quad + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - bpg - ac\gamma - dg\alpha)t^4 + \alpha\beta\gamma t^6 \end{aligned}$$

ここで: $\alpha = a+b-1, \beta = c+d-1, \gamma = p+g-1.$

2. グラフの scattering matrix

2.1. グラフの scattering matrix

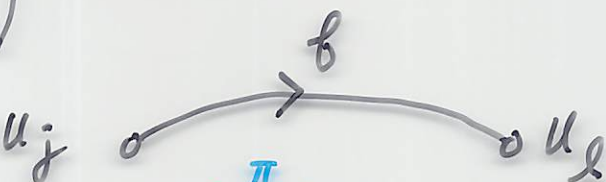
V. Smilansky, Quantum chaos and discrete graphs,
J. Phys. A: Math. Theor. 40(2007), F621-F630 による。

G : n 点, m 辺連結グラフ, $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$

$D(G) = \{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{2m}\}$ s.t. $b_{m+j} = b_j^{-1} (1 \leq j \leq m)$

G の ラプラシアン $\mathbb{L} = \mathbb{L}(G) = \mathbb{D} - A(G)$

今, λ : $\mathbb{L}$ の固有値, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$: λ の固有ベクトル とする。

$\forall$ arc $b = (u_j, u_\ell)$ について. 

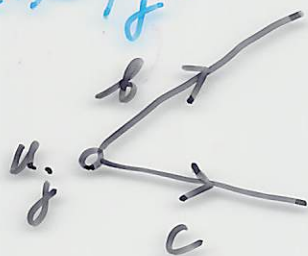
波動関数: $\psi_b(x) = a_b e^{i\frac{\pi}{4}x} + a_{b^{-1}} e^{-i\frac{\pi}{4}x}, x = \pm 1$

s.t. $\psi_b(1) = \psi_j, \psi_b(-1) = \psi_\ell.$

次の3条件を考える:

1. 一意性: $o(b) = o(c) = u_j \Rightarrow \psi_b(1) = \psi_c(1) = \psi_j.$

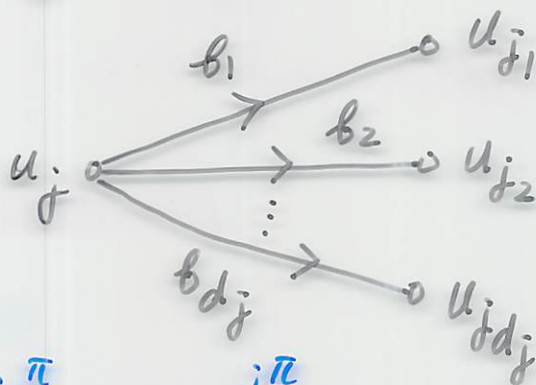
2. ψ : $\mathbb{L}$ の固有ベクトル $\mathbb{L} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}.$



3. 整合性: 下の(1)がすべての arcs で同時に成立。

$b_1, b_2, \dots, b_{d_j}$ ($d = \deg u_j$): u_j から出る arcs.

1 行).



$$\psi_{b_1}(1) = \dots = \psi_{b_{d_j}}(1) = \psi_j.$$

$$a_{b_1} e^{i\frac{\pi}{4}} + a_{b_1}^{-1} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dots = a_{b_{d_j}} e^{i\frac{\pi}{4}} + a_{b_{d_j}}^{-1} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \psi_j.$$

2 行).
$$\mathbb{L} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = (\mathbb{D} - A(G)) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad \text{だから}$$

j 行目: $d_j \psi_j - \psi_{j_1} - \dots - \psi_{j_{d_j}} = \lambda \psi_j$

$$-(\psi_{j_1} + \dots + \psi_{j_{d_j}}) = -\{\psi_{b_1}(-1) + \dots + \psi_{b_{d_j}}(-1)\} = (\lambda - d_j) \psi_j$$

$$-\sum_{k=1}^{d_j} (a_{b_k} e^{-i\frac{\pi}{4}} + a_{b_k}^{-1} e^{i\frac{\pi}{4}}) = (\lambda - d_j) \frac{1}{d_j} \sum_{k=1}^{d_j} (a_{b_k} e^{i\frac{\pi}{4}} + a_{b_k}^{-1} e^{-i\frac{\pi}{4}})$$

∴ したがって、 $o(b) = u_j$ かつ b_1 について

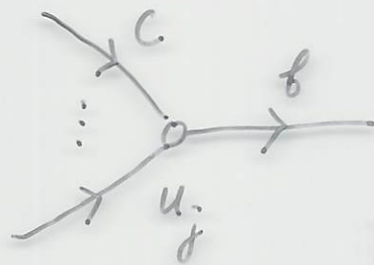
$$a_b = \sum_{t(c)=u_j} \sigma_{b,c}^{(u_j)}(\lambda) a_c$$

... (1)

∴ ∴

$$\sigma_{b,c}^{(u_j)} = i \left(\delta_{b,c} - \frac{2}{d_j} \frac{1}{1 - i(1 - \frac{\lambda}{d_j})} \right).$$

クローネッカーのデルタ



このとき、

G の (bond) scattering matrix $\mathcal{U}(\lambda) = (\mathcal{U}_{ef})_{e,f \in D(G)}$:

$$\mathcal{U}_{ef} = \begin{cases} \sigma_{e,f}^{(t(f))} & \text{if } t(f) = o(e), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



より、(1)が各 arc について、同時に成立するから、

$$\mathcal{U}(f) \begin{pmatrix} a_{b_1} \\ \vdots \\ a_{b_{2m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{b_1} \\ \vdots \\ a_{b_{2m}} \end{pmatrix} \quad \dots (2)$$

$$(\mathbb{I}_{2m} - \mathcal{U}(\lambda)) \begin{pmatrix} a_{b_1} \\ \vdots \\ a_{b_{2m}} \end{pmatrix} = 0 \quad \dots (3)$$

* (2) (or (3)) 成立 $\iff \det(\mathbb{I}_{2m} - \mathcal{U}(\lambda)) = 0$.

定理 2 (Smilansky).

G : n 点, m 辺連結グラフ

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - \mathbb{U}(\lambda)) = \frac{2^m i^n \det(\lambda \mathbb{I}_n - \mathbb{L}(G))}{\prod_{j=1}^n (d_j - i d_j + \lambda i)}$$
$$= \prod_{[C]} (1 - a_C(\lambda))$$

∴ ∴ ∴

$$a_C(\lambda) = \sigma_{e_1, e_n}^{(t(e_n))} \sigma_{e_n, e_{n-1}}^{(t(e_{n-1}))} \cdots \sigma_{e_2, e_1}^{(t(e_1))}, \quad C = (e_1, \dots, e_n)$$

$[C]$: G の prime cycles の同値類.

2.2. Smilansky の定理の別証明

G : n 点, m 辺連結グラフ, $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$.

$$D(G) = \{b_1, \dots, b_m, b_1^{-1}, \dots, b_m^{-1}\}.$$

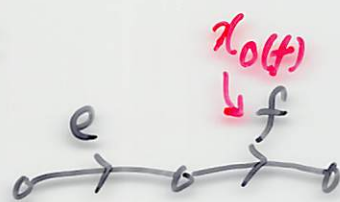
$$d_j = \deg u_j \quad \&$$

$$x_j = x_{u_j} = \frac{2}{d_j} \frac{1}{1 - i(1 - \frac{\lambda}{d_j})} \quad (1 \leq j \leq n)$$

と置く。

$$2m \times 2m \text{ 行列 } B_x = (B_{ef}^{(x)})_{e, f \in D(G)}:$$

$$B_{ef}^{(x)} = \begin{cases} x_{o(f)} & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



定理 1 より.

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - t(B_x - \mathbb{J}_0)) = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - tW_x(G) + t^2(D_x - \mathbb{I}_n)).$$

$$\therefore W_x(G) = (w_{jk}) \quad \& \quad D_x = (d_{jk}):$$

$$w_{jk} = \begin{cases} x_j & \text{if } (u_j, u_k) \in D(G), \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \quad d_{jk} = \begin{cases} d_j x_j & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

これから.

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - t(\overset{t}{B}_x - \overset{t}{J}_0)) = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - tW_x(G) + t^2(D_x - \mathbb{I}_n)) \dots (*)$$

と 3 2.

$$(iU(\lambda) + J_0)_{fe}$$

$$= \begin{cases} i^2 \left(-\frac{2}{d_u} \frac{1}{1-i\left(1-\frac{\lambda}{d_u}\right)} \right) = \chi_u = \chi_{o(f)} & \text{if } o(f) = t(e) = u, \\ i^2 \left(1 - \frac{2}{d_{o(f)}} \frac{1}{1-i\left(1-\frac{\lambda}{d_{o(f)}}\right)} \right) + 1 = \chi_{o(f)} & \text{if } f = e^{-1}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

↓
 $t(e) = o(f) !!$

$$= ({}^t B_x)_{fe}$$

これから、 $iU(\lambda) + J_0 = {}^t B_x$, i.e., ${}^t B_x - {}^t J_0 = iU(\lambda)$.

(*) に、 $t = -i$ 代入

$$\det(\mathbb{I}_{2m} + i({}^t B_x - {}^t J_0)) = 2^{m-n} \det(\mathbb{I}_n + iW_x(G) - (D_x - \mathbb{I}_n))$$

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)) = 2^{m-n} \det(2\mathbb{I}_n + iW_x(G) - D_x).$$

さて、 $X = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$ とおくと、

$$W_x(G) = X A(G) \quad \& \quad D_x = X D.$$

従って.

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{I}_{2m} - \mathbb{U}(\lambda)) &= 2^{m-n} \det(2\mathbb{I}_n + iX A(G) - X\mathbb{D}) \\ &= 2^{m-n} \det(iX \cdot (-2iX^{-1} + A(G) + i\mathbb{D})) \\ &= 2^{m-n} i^n \det X \cdot \det(-2iX^{-1} + A(G) + i\mathbb{D}).\end{aligned}$$

また、 $2x_j^{-1} = 2 \cdot \frac{d_j}{2} (1 - i(1 - \frac{\lambda}{d_j})) = d_j - id_j + \lambda i \quad (1 \leq j \leq n)$
より、

$$\begin{aligned}-2iX^{-1} &= \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & -i2x_j^{-1} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & -i(1-i)d_j + \lambda & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= -i(1-i)\mathbb{D} + \lambda\mathbb{I}_n\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}-2iX^{-1} + A(G) + i\mathbb{D} &= -(i+1)\mathbb{D} + \lambda\mathbb{I}_n + A(G) + i\mathbb{D} \\ &= \lambda\mathbb{I}_n + A(G) - \mathbb{D}\end{aligned}$$

また、 $\det X = x_1 \cdots x_n = \prod_{j=1}^n \frac{2}{d_j - id_j + \lambda i} = \frac{2^n}{\prod_{j=1}^n (d_j - id_j + \lambda i)}$

よって、

$$\therefore \det(\mathbb{I}_{2m} - \mathbb{U}(\lambda)) = 2^m i^n \frac{\det(\lambda\mathbb{I}_n - (\mathbb{D} - A(G)))}{\prod_{j=1}^n (d_j - id_j + \lambda i)}.$$

G : r -正則グラフのとき.

系1.

G : r -正則グラフ, n 点, m 辺.

$$\det(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{U}(\lambda)) = 2^m i^n (r - ir + \lambda i)^{-n} \det(\lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{A}(G) - r \mathbf{I}_n).$$

(証明)

I 定理21による。

II 本定理2による。

G : r -正則グラフ, $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$.

$D(G) = \{b_1, \dots, b_m, b_1^{-1}, \dots, b_m^{-1}\}$.

このとき,

$$x = x_j = x_{u_j} = \frac{2}{r} \frac{1}{1 - i(1 - \frac{\lambda}{r})}.$$

これから,

$$\sigma_{b,c}^{(t(c))} = \begin{cases} -ix & \text{if } t(c) = o(b), \\ i(1-x) & \text{if } c = b^{-1}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

定理 2 より

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)) = \prod_{[C]} (1 - a_C(\lambda)).$$

より

$$a_C(\lambda) = \sigma_{b_1, b_n}^{(t(b_n))} \sigma_{b_n, b_{n-1}}^{(t(b_{n-1}))} \cdots \sigma_{b_2, b_1}^{(t(b_1))}, \quad C = (b_1, \dots, b_n).$$

これから

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)) &= \prod_{[C]} (1 - (i(1-x))^{cbc(C)} (-ix)^{|C| - cbc(C)}) \\ &= \prod_{[C]} (1 - \left(\frac{i(1-x)}{-ix} \right)^{cbc(C)} (-ix)^{|C|}) \end{aligned}$$

$u = \frac{i(1-x)}{-ix}$, $t = -ix$ とおくと、Bartholdi の定理より

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)) &= \prod_{[C]} (1 - u^{cbc(C)} t^{|C|}) \\ &= \zeta(G, u, t)^{-1} \end{aligned}$$

$$= (1 - (1-u)^2 t^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - t A(G) + (1-u) t^2 (\mathbb{D} - (1-u) \mathbb{I}_n))$$

$u = 1 + i/t$ より、 $1-u = -i/t$ だから

$$= 2^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - t A(G) - i t (r + i/t) \mathbb{I}_n)$$

$$= 2^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - t A(G) - (r t i - 1) \mathbb{I}_n)$$

$$= 2^{m-n} \det(2 \mathbb{I}_n - t (A(G) + i r \mathbb{I}_n))$$

$$= 2^{m-n} (-t)^n \det(-2/t \mathbb{I}_n + A(G) + ir \mathbb{I}_n).$$

$$-\frac{2}{t} = -i(r - ri + \lambda i) = -ir - r + \lambda$$

&

$$(-t)^n = (ix)^n = i^n \frac{2^n}{(r - ir + \lambda i)^n} \quad \text{f}).$$

$$\therefore \det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)).$$

$$= 2^{m-n} i^n \frac{2^n}{(r - ir + \lambda i)^n} \det((-ir - r + \lambda) \mathbb{I}_n + A(G) + ir \mathbb{I}_n)$$

$$= 2^m i^n (r - ir + \lambda i)^{-n} \det(\lambda \mathbb{I}_n + A(G) - r \mathbb{I}_n). //$$

2. 3. 半正則 2 部グラフの scattering matrix.

2 部グラフ $G = (V_1, V_2) \dots$ $\begin{cases} V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ G \text{ の辺 } uv \dots u \in V_1, v \in V_2 \\ (u \in V_2, v \in V_1) \end{cases}$



2 部グラフ $G = (V_1, V_2) : (g_1+1, g_2+1)$ - 半正則

def $\iff \deg_G v_i = g_i + 1, \forall v_i \in V_i (i=1, 2).$

例



$(3, 2)$ - 半正則 2 部グラフ

定理 3

$G = (V_1, V_2) : \text{連結 } (g_1+1, g_2+1)$ - 半正則 2 部グラフ, n 点, ε 辺

$|V_1| = n, |V_2| = m (n \leq m)$

$$\det(I_{2\varepsilon} - U)(\lambda) = 2^\varepsilon i^\nu (\lambda - g_2 - 1)^{m-n}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda^2 - (g_1 + g_2 - 2)\lambda + (g_1 + 1)(g_2 + 1) - \lambda_j^2)}{((g_1 + 1)(1 - i) + \lambda i)^n ((g_2 + 1)(1 - i) + \lambda i)^m}.$$

∴

$$\text{Spec}(G) = \{\pm \lambda_1, \dots, \pm \lambda_n, 0, \dots, 0\}.$$

$A(G)$ の固有値全体

2.4. Smilansky の定理の weighted version.

G : n 点, m 辺連結グラフ

$$D(G) \ni e: w(e) \geq 0 \text{ \& } w(e^{-1}) = w(e).$$

* $W(G)$: 対称行列.

$$V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}, D(G) = \{b_1, \dots, b_m, b_1^{-1}, \dots, b_m^{-1}\}.$$

$$d_j = \sum_{o(b)=u_j} w(b) \quad (1 \leq j \leq n)$$

とし.

$$D_w = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

とおく。

G の (weighted) ラフオラップン: $\mathbb{L}_w = D_w - W(G).$

λ : $\mathbb{L}_w$ の固有値, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$: λ の固有ベクトル. とする。

$\forall$ arc $b = (u_j, u_\ell)$ について.

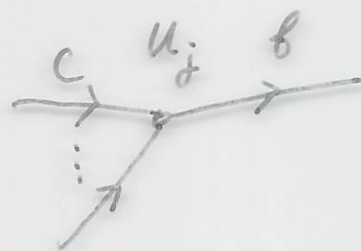
(weighted) 波動関数: $\psi_b(x) = \sqrt{w(b)} (a_b e^{i\frac{\pi}{4}x} + a_{b^{-1}} e^{-i\frac{\pi}{4}x}), x = \pm 1$

$$\text{s.t. } \psi_b(1) = \psi_j, \psi_b(-1) = \psi_\ell.$$

3.2 の条件 1, 2, 3 の下で:

$$a_b = \sum_{t(c)=u_j} \sigma_{b,c}^{(u_j)} a_c$$

が成立.



但し、

$$\sigma_{b,c}^{(u_j)} = i \left(\delta_{b+c} - \frac{2}{d_j} \frac{1}{1 - i(1 - \frac{\lambda}{d_j})} \sqrt{w(b)} \sqrt{w(c)} \right).$$

また、

G の weighted (bond) scattering matrix $U(\lambda) = (U_{ef})_{e,f \in E(G)}$:

$$U_{ef} = \begin{cases} i(\delta_{e+f} - x_{t(f)} \sqrt{w(e)} \sqrt{w(f)}) & \text{if } t(f) = o(e), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで、

$$x_j = x_{u_j} = \frac{2}{d_j} \frac{1}{1 - i(1 - \frac{\lambda}{d_j})} \quad (1 \leq j \leq n).$$

定理 4 (Smilansky)

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)) = \frac{2^m i^n \det(\lambda \mathbb{I}_n - L_w)}{\prod_{j=1}^n (d_j - i d_j + \lambda i)}$$

2種 weightedゼータ関数の変形についての行列式表示より、定理4の別証明を与えることができる。

G : 連結, $W(G)$: G の対称的 weighted matrix.

G : r -regular weighted graph

$$\dots d_v = \sum_{o(e)=v} w(e) = r, \quad \forall v \in V(G).$$

系 2. G : n 点, m 辺連結グラフ

G : r -regular weighted graph のとき.

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - U(\lambda)) = 2^m i^n (r - ir + \lambda i)^{-n} \det(\lambda \mathbb{I}_n + W(G) - r \mathbb{I}_n).$$

$G=(V_1, V_2)$: 2 部グラフ, $W(G)$: 対称的 weighted matrix.

G : (g_1+1, g_2+1) -半正則 weighted 2 部グラフ

$$\dots d_v = \sum_{o(e)=v} w(e) = g_i + 1, \quad \forall v \in V_i \ (i=1, 2).$$

系 3. $G=(V_1, V_2)$: n 点, ε 辺 2 部グラフ, $|V_1|=n, |V_2|=m$.

G : (g_1+1, g_2+1) -半正則 weighted 2 部グラフ のとき.

$$\det(\mathbb{I}_{2\varepsilon} - U(\lambda)) = 2^\varepsilon i^n (\lambda - g_2 - 1)^{m-n} \\ \times \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda^2 - (g_1 + g_2 - 2)\lambda + (g_1 + 1)(g_2 + 1) - \lambda_j^2)}{((g_1 + 1)(1 - i) + \lambda i)^n ((g_2 + 1)(1 - i) + \lambda i)^m}.$$

$$\therefore \text{Spec}(W(G)) = \{\pm \lambda_1, \dots, \pm \lambda_n, 0, \dots, 0\}.$$

$W(G)$ の固有値全体.

2.5. 2種 weighted セータ関数のオイラー積.

G : 連結グラフ, $W(G)$: G の weighted matrix

$e, f \in D(G)$ について.

$w(e, f) \dots B_w - J_0$ の (e, f) -成分

とする。

定理 5

$$Z_1(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w_C t^{|C|-1}).$$

ここで,

$[C]$: G の prime cycles の同値類 &

$$w_C = w(b_1, b_2) w(b_2, b_3) \dots w(b_{n-1}, b_n), \quad C = (b_1, \dots, b_n)$$

* G の 1種 weighted セータ関数:

$$Z(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C) t^{|C|}).$$

$[C]$: G の prime, reduced cycles の同値類.

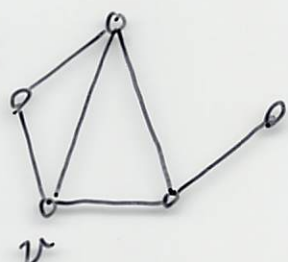
3. グラフの量子ウォークと遷移行列のスホートル問題の諸結果

3.1. グラフ上の離散時間 Grover ウォーク (Emms, 2008)

グラフ $G=(V, E)$ について.

$V=V(G) \ni v$: v の **次数** $d_v = \deg v \dots v$ から出る辺の個数.

例 G :



$$d_v = 3.$$

各辺を反対向きの2つの有向辺(弧)で置き換えた有向グラフ



$\leftarrow G$ の **symmetric digraph**

を考える.

$D(G)$: D_G の arc set.



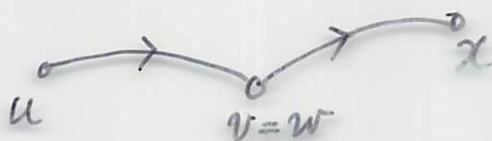
今, $G=(V, E)$: グラフ, n 点 & m 辺, $D(G)$: $2m$ 本の arcs の set.

$D(G)$ 上の離散時間量子ウォークを考える.

$D(G) \ni e=(u, v)$ について, **pure 状態** $\vec{x}_e = \vec{x}_{uv}$ を指定.

$\{\vec{x}_{uv} \mid (u, v) \in D(G)\}$... ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^{2m}$ の正規直交基底 とする.

(u, v) から (w, x) への遷移: **$v=w$ のときのみ生ずる** とする.



量子ウォークの状態:

$$\psi = \sum_{(u,v) \in D(G)} \alpha_{uv} \vec{x}_{uv}, \alpha_{uv} \in \mathbb{C}.$$

とL.

$$P(\vec{x}_{uv}) = \alpha_{uv} \overline{\alpha_{uv}} \dots \vec{x}_{uv} \text{の存在確率}$$

とする。

$$\sum_{(u,v) \in D(G)} \alpha_{uv} \overline{\alpha_{uv}} = 1 \text{ と仮定.}$$

※ 古典的連続時間ランダムウォークにおいて.

状態 ψ_{t+1}, ψ_t の関係: $\psi_{t+1} = \underbrace{U}_{\text{ユニタリ行列}} \psi_t.$

ここで.

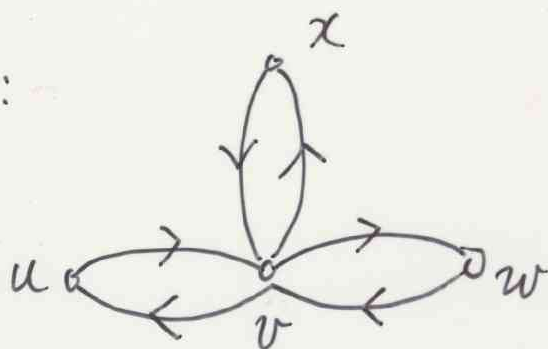
$2m \times 2m$ 行列 (Grover 遷移行列) $U = (U_{(w,x),(u,v)})$:

$$U_{(w,x),(u,v)} = \begin{cases} \frac{2}{d_v} & \text{if } v=w, x \neq u, \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \circ \xrightarrow{\quad} \circ \\ u \quad \quad v=w \quad \quad x \end{array} \\ \frac{2}{d_v} - 1 & \text{if } v=w, x=u, \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \circ \xrightarrow{\quad} \circ \\ \nwarrow \quad \quad \nearrow \\ x=u \quad \quad v=w \end{array} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を用いる。

例

G:



$$U = \begin{matrix} & \begin{matrix} uv & vu & wv & vw & xv & vx \end{matrix} \\ \begin{matrix} uv \\ vu \\ wv \\ vw \\ xv \\ vx \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Annotations:

- $\frac{2}{dv} = \frac{2}{3}$ (pointing to the $\frac{2}{3}$ in the xv row, uv column)
- $\frac{2}{dv} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$ (pointing to the $-\frac{1}{3}$ in the xv row, xv column)
- $\frac{2}{dx} - 1 = \frac{2}{1} - 1 = 1$ (pointing to the 1 in the vx row, vx column)

$$\psi_t = a \vec{x}_{uv} - b \vec{x}_{wv} \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1) \text{ のとき}$$

$$\psi_{t+1} = U \psi_t = a U \vec{x}_{uv} - b U \vec{x}_{wv}$$

$$\vec{x}_{uv} = {}^T(100000), \quad \vec{x}_{wv} = {}^T(001000) \text{ より}$$

$$= a {}^T(0 - \frac{1}{3} 0 \frac{2}{3} 0 \frac{2}{3}) - b {}^T(0 \frac{2}{3} 0 - \frac{1}{3} 0 \frac{2}{3})$$

$$= (-\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b) \vec{x}_{vu} + (\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b) \vec{x}_{vw} + \frac{2}{3}(a-b) \vec{x}_{vx}$$

$$\star \quad |-\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b|^2 + |\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b|^2 + \frac{4}{9}|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad !!$$

☆ グラフ上の量子ウォーク (Grover ウォーク) の極限定理 etc
の解析は全く手付かず!!

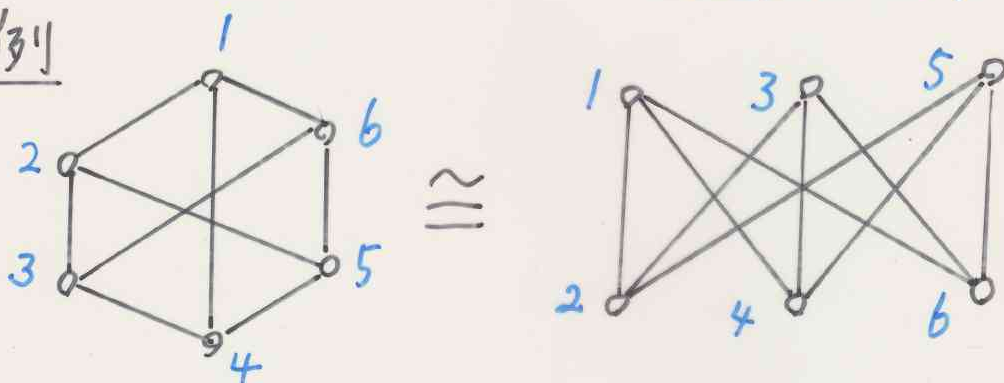
2. グラフ同型についての予想と Grover 遷移行列のスペクトラム

G, H : グラフ

G, H : 同型 $(G \cong H) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists f: V(G) \rightarrow V(H) \text{ (bij) s.t.}$

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$$

例



グラフの同型問題

2つのグラフ G, H について、 $G \cong H$ がどうか決定せよ。

Emms, Hancock, Severini & Wilson (2006) は、次の予想を提出した。

$A = (a_{ij})$: 実正方形行列

A の positive support $A^+ = (a_{ij}^+)$:

$$a_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ij} > 0, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

予想 (Emms, Hancock, Severini & Wilson)

G, H : 同じパラメータをもつ 強正則グラフ

$$G \cong H \iff \text{Spec}((U(G)^3)^+) = \text{Spec}((U(H)^3)^+).$$

$U(G)$: G の Grover 遷移行列,

$\text{Spec}(F)$: 正方形行列 F のスペクトラム

G : 強正則グラフ $((n, k, \lambda, \mu)$ -グラフ)

def $\Leftrightarrow$

(i) $|V(G)| = n$,

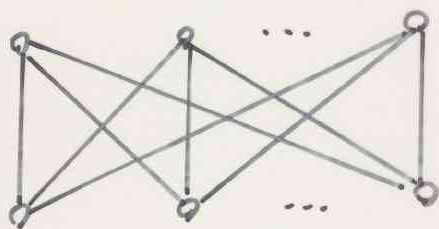
(ii) G の各点 v の次数 $d_v = k$,

(iii) 隣接する $\forall$ 2点 u, v : λ 本の点に隣接

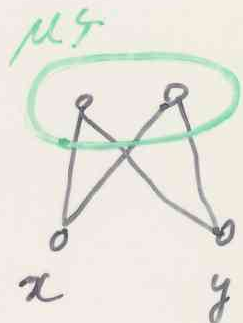
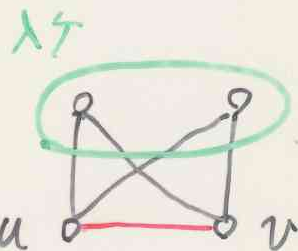
(iv) 隣接しない $\forall$ 2点 x, y : μ 本の点に隣接

* (ii) をみたすとき、 G : k -正則グラフという。

例 (完全二部グラフ $K_{n,n}$)



: $(2n, n, 0, n)$ -グラフ



* 正則グラフについては予想は不成立... 14点の正則グラフの反例がある。

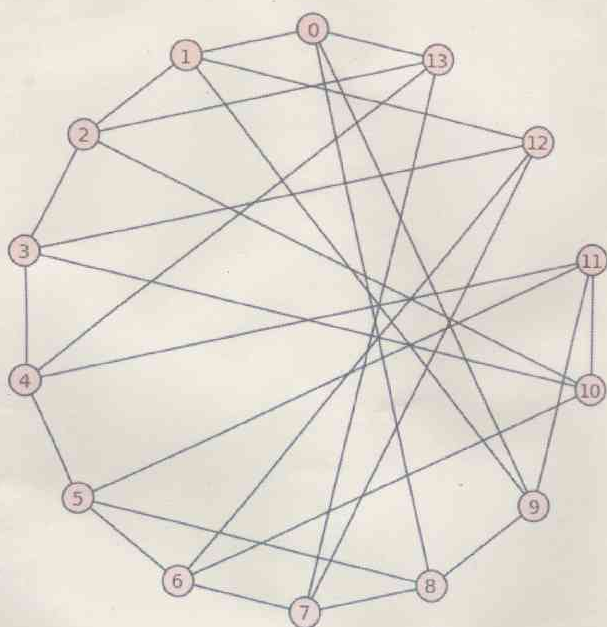
* 同型でない $(16, 6, 2, 2)$ -グラフは 2ヶ。

“ $(36, 15, 6, 6)$ -グラフは 32548ヶ。

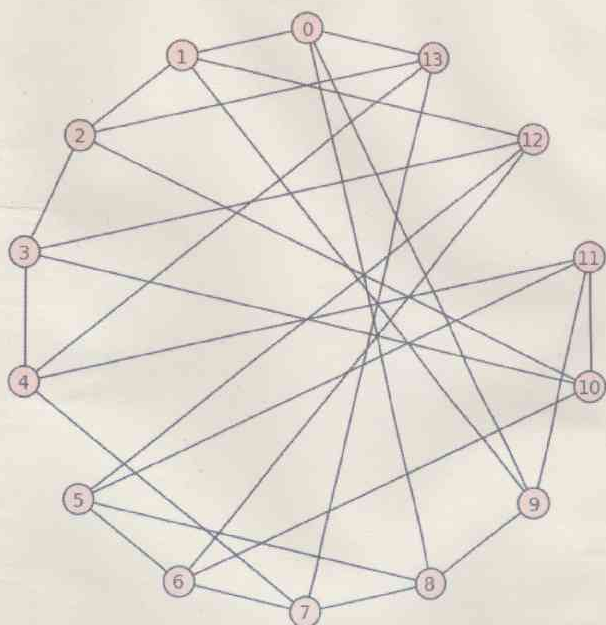
→ Emms et al は、いくつかの場合について、予想が成立することも確めた (13点以下)。

* 予想が成立 $\Rightarrow$ 強正則グラフの同型性判定は、多項式時間でテストできる!!

Example (Emms et al)



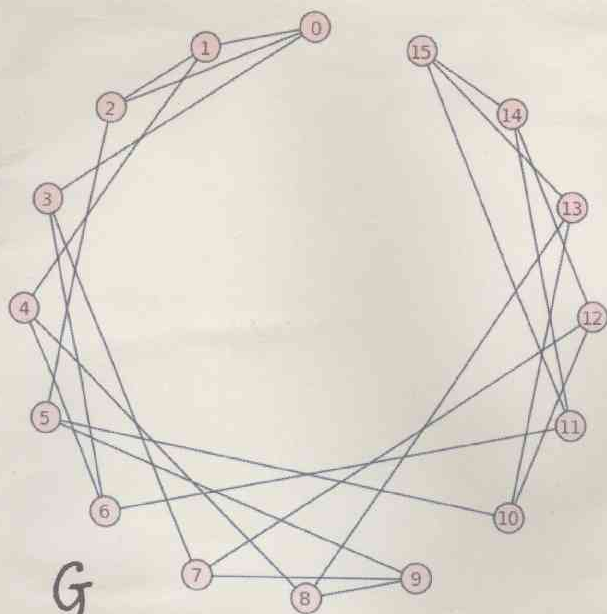
G



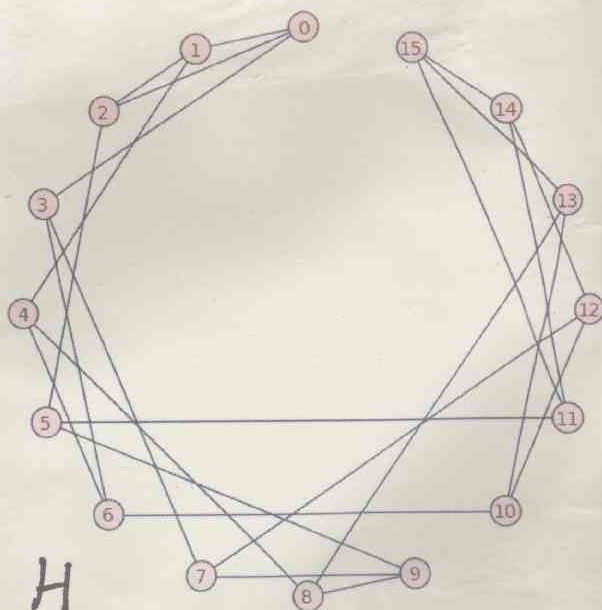
H

$G, H: 4\text{-regular}, G \not\cong H \text{ \& } \text{Spec}((U(G)^3)^+) = \text{Spec}((U(H)^3)^+)$

Example (Royle)



G



H

$G, H: 3\text{-regular}, G \not\cong H \text{ \& } \text{Spec}((U(G)^3)^+) = \text{Spec}((U(H)^3)^+)$

3.2. Grover 遷移行列のスロケットル

— Grover 遷移行列の特性多項式 —

G : n 点の連結グラフ,

$n \times n$ 行列 $T(G) = (T_{uv})_{u,v \in V(G)}$:

$$T_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{d_u} & \text{if } (u,v) \in D(G), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

定理 6 (Konno & Sato).

G : 連結グラフ, n 点 & m 辺, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

U : G の Grover 遷移行列.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{2m} - U) &= (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + 1)I_n - 2\lambda T(G)) \\ &= \frac{(\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + 1)D - 2\lambda A(G))}{d_{v_1} \cdots d_{v_n}} \end{aligned}$$

Proof. $2m \times 2m$ 行列 $B_d = (B_{ef}^{(d)})_{e,f \in D(G)}$:

$$B_{ef}^{(d)} = \begin{cases} \frac{2}{d_o(f)} & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

とある。

定理 1 より,

$$\det(I_{2m} - t(B_d - J_0)) = (1 - t^2)^{m-n} \det(I_n - tW_d(G) + t^2(D_d - I_n)).$$

ここで、 $W_d = (w_{uv}^{(d)})_{u,v \in V(G)}$ & $D_d = (d_{uv})_{u,v \in V(G)}$:

$$w_{uv}^{(d)} = \begin{cases} \frac{2}{du} & \text{if } (u,v) \in D(G), \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$d_{uv} = \begin{cases} 2 & \text{if } u=v, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

また,

$$d_v \times \frac{2}{d_v} = 2 \quad (v \in V(G)).$$

これから,

$$\det(I_{2m} - t({}^T B_d - {}^T J_0)) = (1 - t^2)^{m-n} \det(I_n - tW_d(G) + t^2 I_n).$$

ここで,

$${}^T B_d - {}^T J_0 = U \quad \& \quad W_d(G) = 2T(G).$$

従って,

$$\det(I_{2m} - tU) = (1 - t^2)^{m-n} \det((1 + t^2)I_n - 2tT(G)).$$

今、 $t = 1/\lambda$ とおくと、

$$\det(I_{2m} - \frac{1}{\lambda} U) = (1 - \frac{1}{\lambda^2})^{m-n} \det((1 + \frac{1}{\lambda^2})I_n - \frac{2}{\lambda} T(G))$$

これから、

$$\therefore \det(\lambda I_{2m} - U) = (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + 1)I_n - 2\lambda T(G))$$

次に、

$$T(G) = D^{-1} A(G)$$

より、

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{2m} - U) &= (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + 1)I_n - 2\lambda D^{-1} A(G)) \\ &= (\lambda^2 - 1)^{m-n} (\det D^{-1}) \det((\lambda^2 + 1)D - 2\lambda A(G)) \end{aligned}$$

$$\det D^{-1} = \frac{1}{d_{v_1} \cdots d_{v_n}} \quad \text{から、}$$

$$\therefore \det(\lambda I_{2m} - U) = \frac{(\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + 1)D - 2\lambda A(G))}{d_{v_1} \cdots d_{v_n}}$$

定理 6 から、 U のスロクトルが、 $T(G)$ のスロクトルで表示できる。

$\text{Spec}(F)$... 行列 F のスロクトル (固有値全体)

Cor 2 (Emms, Hancock, Severini & Wilson).

G : n 点, m 辺の連結グラフ

U : G の Grover 遷移行列

U の固有値:

$$2n\gamma: \lambda = \lambda_T \pm i\sqrt{1-\lambda_T^2}, \lambda_T \in \text{Spec}(T(G))$$

$$2(m-n)\gamma: \pm 1 \text{ (多重度は } m-n \text{)}$$

Proof. 定理 6 より.

$$\det(\lambda I_{2m} - U) = (\lambda^2 - 1)^{m-n} \prod_{\lambda_T \in \text{Spec}(T(G))} (\lambda^2 + 1 - 2\lambda_T \lambda).$$

$$\lambda^2 + 1 - 2\lambda_T \lambda = 0 \text{ を解くと.}$$

$$\lambda = \lambda_T \pm i\sqrt{1-\lambda_T^2}.$$

※ G : 連結 k -正則グラフ, n 点, m 辺のとき.

U の固有値:

$$2n\gamma: \lambda = \frac{\lambda_A \pm i\sqrt{k^2 - \lambda_A^2}}{k}, \lambda_A \in \text{Spec}(A(G)).$$

$$2(m-n)\gamma: \pm 1.$$

⊙ 定理 6 の第 2 式 より. $D = kI_n$ とおくと.

$$\det(\lambda I_{2m} - U) = \frac{(\lambda^2 - 1)^{m-n}}{d_{v_1} \cdots d_{v_n}} \prod_{\lambda_A \in \text{Spec}(A(G))} (k\lambda^2 + k - 2\lambda_A \lambda).$$

3.3. Grover 遷移行列の positive support.

Emms, Hancock, Severini & Wilson は.

U^+ , $(U^2)^+$ のスペクトラム を決定した。

— U^+ と Ihara セータ関数の関連 —

定理 7 (Ren, Aleksic, Emms, Wilson & Hancock, 2010)

G : 連結グラフ, U : G の Grover 遷移行列

G の 最小次数 $\delta(G) \geq 2$ と仮定。

$${}^T U^+ = B - J.$$

U^+ の転置

※ Grover 遷移行列の positive support の転置: edge matrix

※ 定理 2 と 定理 7 より, U^+ の特性多項式について
次が成り立つ。

定理 8 (Konno & Sato).

G : n 点, m 辺の連結グラフ

$$\det(\lambda \mathbb{I}_{2m} - U^+) = (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 - 1) \mathbb{I}_n - \lambda A(G) + D(G))$$

Proof. I 定理 2 と 定理 7 より、

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{I}_{2m} - u\mathbb{U}^\dagger) &= \det(\mathbb{I}_{2m} - u({}^T B - {}^T J_0)) \\ &= \det(\mathbb{I}_{2m} - u(B - J_0)) \\ &= (1-u^2)^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - uA(G) + u^2(D - \mathbb{I}_n)).\end{aligned}$$

$u = 1/\lambda$ とおくと、

$$\det(\mathbb{I}_{2m} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{U}^\dagger) = (1 - \frac{1}{\lambda^2})^{m-n} \det(\mathbb{I}_n - \frac{1}{\lambda}A(G) + \frac{1}{\lambda^2}(D - \mathbb{I}_n)).$$

これから、

$$\therefore \det(\lambda\mathbb{I}_{2m} - \mathbb{U}^\dagger) = (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 - 1)\mathbb{I}_n - \lambda A(G) + D(G)). //$$

定理 8 を使って、 $\mathbb{U}^\dagger$ の固有値を、 $A(G)$ の固有値で表示する。

Cor 3 (Emms, Hancock, Severini & Wilson).

G : 連結 k -正則グラフ, n 点 & m 辺, $\delta(G) \geq 2$.

$\mathbb{U}$: G の Grover 遷移行列.

$\mathbb{U}^\dagger$ の固有値:

$$2n \text{ 个: } \lambda = \frac{\lambda_A}{2} \pm i\sqrt{k-1 - \lambda_A^2/4}, \lambda_A \in \text{Spec}(A(G)).$$

$$2(m-n) \text{ 个: } \pm 1 \text{ (多重度は } m-n \text{)}.$$

Proof.

定理 8 より、 $D = kI_n$ とおす。

$$\det(\lambda I_{2m} - U^t) = (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + k - 1)I_n - \lambda A(G))$$

$$= (\lambda^2 - 1)^{m-n} \prod_{\lambda_A \in \text{Spec}(A(G))} (\lambda^2 + k - 1 - \lambda_A \lambda).$$

$$\lambda_A \in \text{Spec}(A(G))$$

$\lambda^2 - \lambda_A \lambda + k - 1 = 0$ を解くと、

$$\therefore \lambda = \frac{\lambda_A}{2} \pm i \sqrt{k - 1 - \frac{\lambda_A^2}{4}}. //$$

3.4. グラフの遷移行列の2乗の positive support

Emms, Hancock, Severini & Wilson は.

$(U^2)^+$ のスペクトラムを決定した。

— $(U^2)^+$ と U^+ の関係 —

定理 9 (Godsil & Guo, 2010)

G : 連結 k -正則グラフ, U : G の Grover 遷移行列

$k > 2$ と仮定。

$$(U^2)^+ = (U^+)^2 + I.$$

定理 8 と定理 9 より, $(U^2)^+$ の特性多項式について、次が成り立つ。

定理 10 (Konno & Sato)

G : 連結 k -正則グラフ, n 点 & m 辺

$k > 2$ と仮定。

$$\det(\lambda I_{2m} - (U^2)^+) = (\lambda - 2)^{2m-2n} \times \det((k-2+\lambda)^2 I_n - (\lambda-1)A(G)^2).$$

Proof. 定理 8 と定理 9 より、

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbb{I}_{2m} - u(\mathbb{U}^2)^+) &= \det(\mathbb{I}_{2m} - u((\mathbb{U}^+)^2 + \mathbb{I}_{2m})) \\
 &= \det((1-u)\mathbb{I}_{2m} - u(\mathbb{U}^+)^2) \\
 &= u^{2m} \det\left(\frac{1-u}{u}\mathbb{I}_{2m} - (\mathbb{U}^+)^2\right) \\
 &= u^{2m} \det\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\mathbb{I}_{2m} - \mathbb{U}^+\right) \det\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\mathbb{I}_{2m} + \mathbb{U}^+\right) \\
 &= u^{2m} \left(\frac{1-u}{u} - 1\right)^{m-n} \det\left(\left(\frac{1-u}{u} - 1\right)\mathbb{I}_n - \sqrt{\frac{1-u}{u}}A(G) + k\mathbb{I}_n\right) \\
 &\quad \times \left(\frac{1-u}{u} - 1\right)^{m-n} \det\left(\left(\frac{1-u}{u} - 1\right)\mathbb{I}_n + \sqrt{\frac{1-u}{u}}A(G) + k\mathbb{I}_n\right) \\
 &= u^{2n} (1-2u)^{2m-2n} \det\left(\frac{ku-2u+1}{u}\mathbb{I}_n - \sqrt{\frac{1-u}{u}}A(G)\right) \\
 &\quad \times \det\left(\frac{ku-2u+1}{u}\mathbb{I}_n + \sqrt{\frac{1-u}{u}}A(G)\right) \\
 &= (1-2u)^{2m-2n} \det((ku-2u+1)\mathbb{I}_n - \sqrt{u(1-u)}A(G)) \\
 &\quad \times \det((ku-2u+1)\mathbb{I}_n + \sqrt{u(1-u)}A(G))
 \end{aligned}$$

$u = \frac{1}{\lambda}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbb{I}_{2m} - \frac{1}{\lambda}(\mathbb{U}^2)^+) \\
 &= \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)^{2m-2n} \det\left(\left(\frac{k-2}{\lambda} + 1\right)\mathbb{I}_n - \sqrt{\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}A(G)\right) \\
 &\quad \times \det\left(\left(\frac{k-2}{\lambda} + 1\right)\mathbb{I}_n + \sqrt{\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}A(G)\right)
 \end{aligned}$$

これから、

$$\therefore \det(\lambda \mathbb{I}_{2m} - (\mathcal{U}^2)^+)$$

$$= (\lambda - 2)^{2m-2n} \det((k-2+\lambda) \mathbb{I}_n - \sqrt{\lambda-1} A(G))$$

$$\times \det((k-2+\lambda) \mathbb{I}_n + \sqrt{\lambda-1} A(G))$$

$$= (\lambda - 2)^{2m-2n} \det((k-2+\lambda)^2 \mathbb{I}_n - (\lambda-1) A(G)^2). //$$

定理 10 を使って、 $(\mathcal{U}^2)^+$ の固有値を、 $A(G)$ の固有値で表示する。

Cor 4 (Emms, Hancock, Severini & Wilson)

G : 連結 k -正則グラフ, n 点 & m 辺, $k \geq 2$

$\mathcal{U}$: G の Grover 遷移行列.

$(\mathcal{U}^2)^+$ の固有値:

$$2n \gamma: \lambda = \frac{\lambda_A^2 - 2k + 4}{2} \pm i \frac{\sqrt{4k - 4 - \lambda_A^2}}{2}, \lambda_A \in \text{Spec}(A(G))$$

$$2(m-n) \gamma: 2 \text{ (多重度は } 2m-2n \text{)}.$$

Proof.

定理 10 より、

$$\det(\lambda \mathbb{I}_{2m} - (U^2)^+)$$

$$= (\lambda - 2)^{2m-2n} \prod_{\lambda_A \in \text{Spec}(A(G))} ((k-2+\lambda)^2 - (\lambda-1)\lambda_A^2)$$

$$= (\lambda - 2)^{2m-2n} \prod_{\lambda_A} (\lambda^2 + (2k-4-\lambda_A^2)\lambda + (k-2)^2 + \lambda_A^2)$$

$$\lambda^2 + (2k-4-\lambda_A^2)\lambda + (k-2)^2 + \lambda_A^2 = 0$$

を解くと、

$$\therefore \lambda = \frac{\lambda_A^2 - 2k + 4}{2} \pm i \frac{\sqrt{4k-4-\lambda_A^2}}{2} . //$$

※ $\text{Spec}(\mathcal{U}), \text{Spec}(\mathcal{U}^+), \text{Spec}((\mathcal{U}^2)^+)$ が予想の不変量にたがらない理由.

$G, H: (n, k, \lambda, \mu)$ -グラフ (強正則グラフ)

このとき.

$$\text{Spec}(A(G)) = \text{Spec}(A(H)) = \{k, \theta, \tau\}.$$

ここで.

$$\left(\theta = \frac{(\lambda - \mu) + \sqrt{\Delta}}{2}, \tau = \frac{(\lambda - \mu) - \sqrt{\Delta}}{2}, \Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) \right)$$

θ, τ の多重度: n, k, λ, μ で決まる.

Cor 2 の後の *, Cor 3, Cor 4 より.

$\mathcal{U}, \mathcal{U}^+, (\mathcal{U}^2)^+$ の固有値: 隣接行列の固有値で決まる.

これから.

$$\text{Spec}(\mathcal{U}(G)) = \text{Spec}(\mathcal{U}(H)),$$

$$\text{Spec}(\mathcal{U}(G)^+) = \text{Spec}(\mathcal{U}(H)^+),$$

$$\text{Spec}((\mathcal{U}(G)^2)^+) = \text{Spec}((\mathcal{U}(H)^2)^+).$$

よって.

$G \cong H$ は $\text{Spec}(\mathcal{U}), \text{Spec}(\mathcal{U}^+), \text{Spec}((\mathcal{U}^2)^+)$ による

判定できない!!

3.5. グラフの遷移行列の3乗のpositive support.

えっ、Godsil & Guoの結果を述べる。

G : 連結グラフ, n 点 & m 辺

$n \times 2m$ 行列 $D_h = ((D_h)_{ve})$ & $D_t = ((D_t)_{ve})$:

$$(D_h)_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{if } t(e) = v, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$



$$(D_t)_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{if } o(e) = v, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



このとき.

Prop 1 (Godsil & Guo).

1. $D_h^T D_t = {}^T A(G)$ & $D_t^T D_h = {}^T B.$

2. G : k -正則 のとき.

$$U = \frac{2}{k} {}^T D_t D_h - J_0.$$

3. $J_0^T D_h = {}^T D_t$ & $J_0^T D_t = {}^T D_h.$



G : グラフ, $C=(e_1, \dots, e_r)$: G の cycle

$e_i=(v_i, v_{i+1})$ ($1 \leq i \leq r$) のとき.

$$C=(v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}) \quad (v_1=v_{r+1})$$

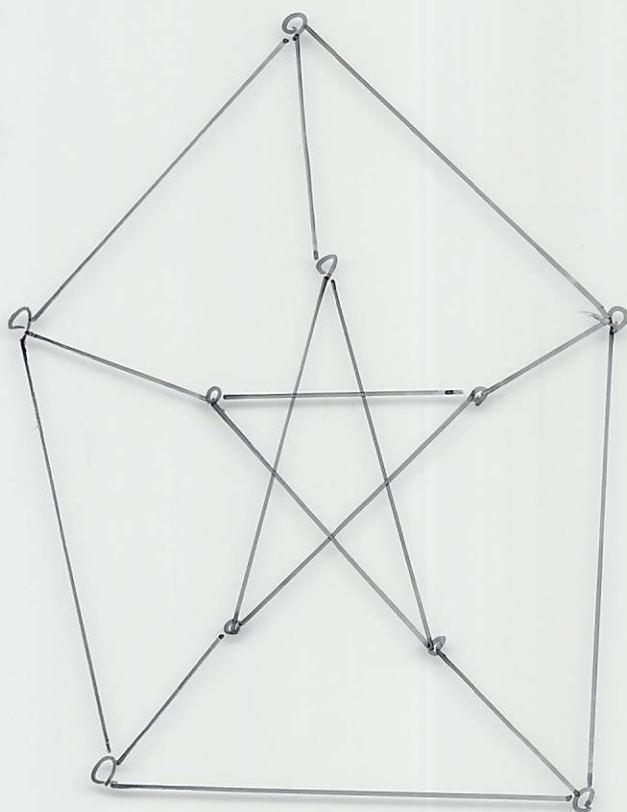
と書く。

cycle C : *essential* ... $v_1, v_2, \dots, v_r$ がすべて異なる

G の *内周* $g(G)$... G の最小 essential cycle の長さ.

例

G :



$$g(G)=5$$

定理11 (Higuchi, Konno, Sato & Segawa)

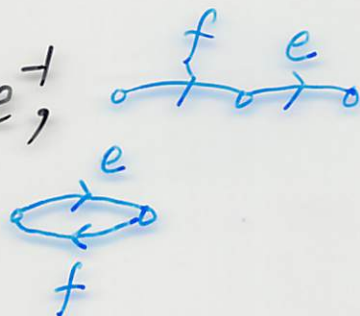
G : 連結 k -正則グラフ, $k \geq 2$ & $g(G) \geq 4$ と仮定.

$$(U^3)^+ = (U^+)^3 + {}^T U^+$$

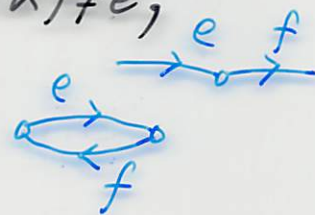
Proof

Grover 遷移行列 $U = (U_{ef})$:

$$U_{ef} = \begin{cases} \frac{2}{k} > 0 & \text{if } t(f) = o(e) \text{ \& } f \neq e^+, \\ \frac{2}{k} - 1 < 0 & \text{if } f = e^+, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



また, $B = (B_{ef})$: $B_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{if } t(e) = o(f) \text{ \& } f \neq e^+, \\ 1 & \text{if } f = e^+, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$



${}^T U$ と B の nonzero 成分は一致.

${}^T U^3$ と B^3 を並列に考える.

$$\Pi = B - J_0 \text{ \& } P = J_0 \text{ とおく.}$$

定理7 より,

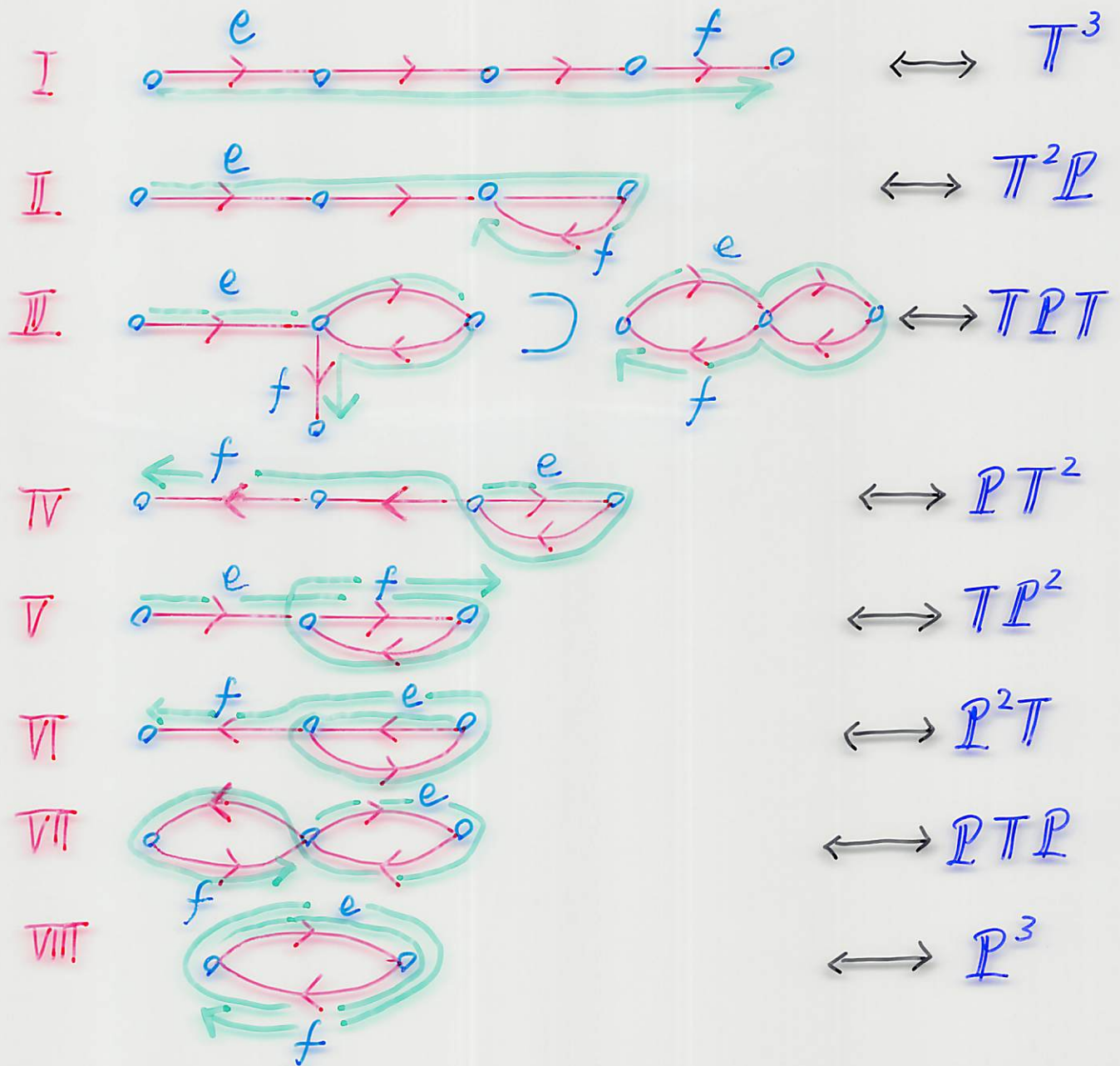
$$B = \Pi + P \text{ \& } {}^T U^+ = \Pi.$$

$\Pi \leftrightarrow$ backtracking がない e, f の関係
 $P \leftrightarrow$ backtracking がある e, f の関係

これから,

$$B^3 = (\Pi + P)^3 = \Pi^3 + \Pi^2 P + \Pi P \Pi + P \Pi^2 + \Pi P^2 + P^2 \Pi + P \Pi P + P^3$$

B^3 or $(TV)^3$ の nonzero (e, f) -成分の e, f の関係:



$(T^3, T P^2, P^2 T, P T P)$ の非零成分に対応する $T^3 U^3$ の成分 > 0
 $(T^2 P, T P T, P T^2, P^3)$ " " < 0

$t(e) = o(f)$ のとき. $\xrightarrow[e]{\quad} \circ \xrightarrow[f]{\quad}$

$T P T, T P^2, P^2 T$ の nonzero 成分: overlap

このとき.

$$\begin{aligned} (TU^3)_{ef} &= \frac{2}{k} \left(\frac{2}{k} - 1 \right) \frac{2}{k} \times (k-2) + 2 \frac{2}{k} \left(\frac{2}{k} - 1 \right)^2 \\ &= \frac{2}{k} \left(\frac{2}{k} - 1 \right) \left(\frac{2(k-2)}{k} + \frac{2(2-k)}{k} \right) = 0 \quad !! \end{aligned}$$

また.

$T^3, P T^2, T^2 P, P^3$ or $P T P, P T^2, T^2 P, P^3$: overlap しない!!

これから.

$(TU)^3$ & $T^3 + P T P$ の正成分: 同じ場所にある!!

従って.

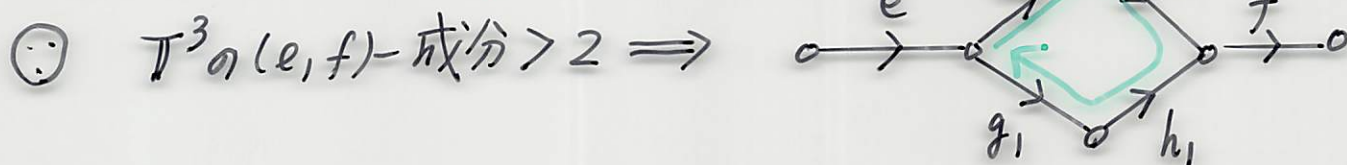
$$(TU^3)^+ = (T^3 + P T P)^+$$

もし T^3 と $P T P$ の non zero (e, f) -成分: overlap



また. $P T P$ の non zero 成分 = 1

さらに. T^3 " = 1



$\Rightarrow (g, h, h_1^{-1}, g_1^{-1})$: 長さ 4 の cycle

$\Rightarrow g(G) = 4$ (矛盾) $\square$

よって.

$$(\tau U^{-3})^+ = \tau^3 + P \tau P$$

i.e.,

$$(U^{-3})^+ = (\tau \tau)^3 + P \tau \tau P$$

$$\tau \tau = U^+ \text{ より}$$

$$= (U^+)^3 + P U^+ P$$

定理7 と Prop 1 (1), (3) より.

$$P U^+ P = P(\tau B - P)P$$

$$= P(\tau D_t D_h - P)P$$

$$= P \tau D_t \cdot D_h P - P^3$$

$$= \tau D_h D_t - P^3$$

$$= B - P = \tau U^+$$

よって.

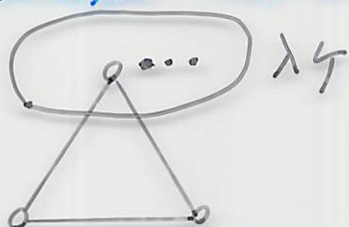
$$\therefore (U^{-3})^+ = (U^+)^3 + \tau U^+ //$$

※ (Th 11) 予想は攻めできない

$G: (n, k, \lambda, \mu)$ -グラフ (強正則グラフ)

$$\lambda \geq 1 \Rightarrow g(G) = 3 !!$$

(隣接する2点に、ある点が隣接すると、三角形ができる)



これから、予想を示すには、Th 11 は使えない。

※ Godsil & Guo の手法で、 $(\mathbb{F}_3)^+$ の構造の詳細がわかる。

※ Emms et al は、"強正則グラフについて、 $(\mathbb{F}_3)^+$ の成分 = 1 とする" 必要十分条件を見つけた。

予想に関連して、難しい課題:

$\forall n \in \mathbb{N}$: グラフ G の $(\mathbb{F}_3)^+$ の特性多項式を求めよ。



—その後の展開—

定理12 (Konno, Sato & Segawa).

G : 連結 k -正則グラフ, n 点 & m 辺. $k \geq 2$ & $g(G) \geq 4$ と仮定.

$$\det(\lambda \mathbb{I}_{2m} - (U^3)^+) = (\lambda^2 - 4)^{m-n}$$

$$\times \det(\lambda^2 \mathbb{I}_n - \lambda(A^3 - (3k-4)A) + (A^4 - k^2 A^2 + 2(k-1)(k^2-2k+2)\mathbb{I}_n))$$

これが.

定理13 (Segawa)

G : 連結 k -正則グラフ, n 点 & m 辺, $k \geq 2$ & $g(G) \geq 4$ と仮定.

$(U^3)^+$ の固有値:

$$2n \gamma: \frac{1}{2} \{ \lambda_A (\lambda_A^2 - 3k + 4) \pm \sqrt{\lambda_A^6 - 2(3k-2)\lambda_A^4 + (13k^2 - 24k + 16)\lambda_A^2 - 8(k-1)(k^2-2k+2)} \}, \lambda_A \in \text{Spec}(A(G)),$$

残り $2(m-n) \gamma: \pm 2$ (多重度 $m-n$).

※(予想についてのアプローチ)

G, H : 同じパラメータ (n, k, λ, μ) をもつ k -正則グラフ, $k \geq 2$.

$G \not\cong H, g(G) \geq 4$ & $g(H) \geq 4 \Rightarrow$ 予想は不成立!!



予想の反例 (Godsil, Guo & Myklebust)

order(s, t) の generalized quadrangle :

$\forall$ 点 $\in \exists (s+1)$ 本の line & $\forall$ line $\exists \exists (t+1)$ 本の点

と $t+1$ の incidence structure

※ order(s, t) の generalized quadrangle の line 交グラフ
 ... $((t+1)(st+1), s(t+1), t-1, s+1)$ -グラフ (3 変正則グラフ)

※ $\exists$ 同型でない 2 つの order($5^2, 5$) の generalized quadrangles:

$H(3, 5^2), \text{FTWKB}(5)$

X : $H(3, 5^2)$ の line 交グラフ,

Y : $\text{FTWKB}(5)$ の $\sim$ とすると.

X, Y : $(756, 130, 4, 26)$ -グラフ & $X \not\cong Y$

また,

$$\text{Spec}(U(X)^3)^+ = \text{Spec}(U(Y)^3)^+ !!$$

よって,

Emms et al 予想は不成立!!

4. グラフ上回え数量子ウエフ

4.1. 回え数行列の右固有値.

回え数 $H = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

ここで、 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

$n \times n$ 回え数行列 $U = (U_{ij})$ ($U_{ij} \in H$) について.

(右固有値問題: $Uv = v\lambda$, $\lambda \in H$, $v \neq 0$,
左固有値問題: $Uw = \mu w$, $\mu \in H$, $w \neq 0$.)

$$* Uv = v\lambda \Rightarrow U^k v = v\lambda^k$$

* $M: n \times n$ 回え数行列, $\exists n \times n$ 複素行列 A, B s.t.

$$M = A + jB.$$

今、 $\text{Mat}(m, K) \dots$ 体 K の元を成分に持つ $m \times m$ 行列全体.

$\psi: \text{Mat}(n, H) \rightarrow \text{Mat}(2n, \mathbb{C})$ と.

$$\psi(M) = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$$

と def.

定理 14

$\forall M \in \text{Mat}(n, H)$,

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n: \det(\lambda I_{2n} - \psi(M)) = 0$ の解 とする.

M の右固有値:

$$\lambda_1^{H^*} \cup \dots \cup \lambda_n^{H^*}.$$

ここで、 $\lambda^{H^*} = \{h^* \lambda h \mid h \in H^* = H - \{0\}\}$.

4.2. Grover walkの回次数への拡張.

G : グラフ, n 点 & m 辺,

$$g: D(G) \rightarrow H(fx).$$

G 上の Grover walk の回次数的拡張についての

$2m \times 2m$ 遷移行列 $U = (U_{ef})_{e,f \in D(G)}$:

$$U_{ef} = \begin{cases} g(e) & \text{if } t(f) = o(e) \text{ \& } f \neq e^{\dagger}, \\ g(e) - 1 & \text{if } f = e^{\dagger}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

と def.

$$g(e) = g_0(e) + g_1(e)i + g_2(e)j + g_3(e)k, \quad e \in D(G).$$

と置く。

定理 15 (Konno, Mitsuhashi & Sato).

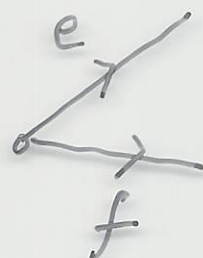
$$U: \mathbb{I} = \mathbb{I} \text{ or } U^{\dagger} \overline{U} = \mathbb{I}$$

$\Leftrightarrow$

$$D(G) \ni e: \quad g_0(e)^2 + g_1(e)^2 + g_2(e)^2 + g_3(e)^2 - \frac{2g_0(e)}{d_0(e)} = 0$$

&

$$\forall e, f \in D(G) \text{ s.t. } o(e) = o(f): \quad g(e) = g(f).$$



假定: $\sum_{o(e)=u} f(e) = \alpha$ (-定) for $\forall u \in V(G)$.

定理 15 & 假定 5). $f(e) = \frac{\alpha}{d_o(e)}$, $\forall e \in D(G)$.

* $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f \equiv 0$ or $\mathbb{U}$: Grover 遷移行列!!

4.3. グラフ上の四元数 Grover 遷移行列の右固有値.

G : n 点 & m 辺の連結グラフ.

$g: D(G) \rightarrow H$ s.t. $\sum_{o(e)=u} g(e) = \alpha, \forall u \in V(G)$

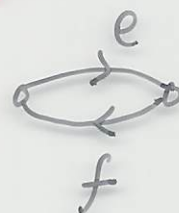
$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ とし. $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ とする.

$$\ast. \alpha^{H^*} \cap \mathbb{C} = \{\alpha_0 \pm \lambda i\}.$$

今、 $\alpha_{\pm} = \alpha_0 + \lambda i$ とし.

$2m \times 2m$ 行列 $U_{\pm} = ((U_{\pm})_{ef})_{e,f \in D(G)}$:

$$(U_{\pm})_{ef} = \begin{cases} \frac{\alpha_{\pm}}{d_{o(e)}} & \text{if } t(f) = o(e) \text{ \& } f \neq e^{\dagger}, \\ \frac{\alpha_{\pm}}{d_{o(e)}} - 1 & \text{if } f = e^{\dagger}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$



このとき.

$$\det(\lambda I_{4m} - \psi(U)) = \det(\lambda I_{2m} - U_+) \det(\lambda I_{2m} - U_-).$$

これから.

$$\{U \text{ の複素右固有値} \} = \text{Spec}(U_+) \cup \text{Spec}(U_-).$$

また.

$$\text{Spec}(U_-) = \{\bar{\mu} \mid \mu \in \text{Spec } U_+\}.$$

また、 $2m \times 2m$ 行列 $B_{\pm} = ((B_{\pm})_{ef})_{e, f \in D(G)}$:

$$(B_{\pm})_{ef} = \begin{cases} \frac{\alpha_{\pm}}{d_0(e)} & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \quad \xrightarrow{e} \circ \xrightarrow{f}$$

と def.

$$* \quad U_{\pm} = {}^t B_{\pm} - I_0.$$

定理 1 の $B_w, B_{\pm}$ を代入

$$\det(\lambda I_{2m} - U_{\pm}) = (\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + \alpha_{\pm} - 1)I_n - \lambda W_{\pm}).$$

よって、 $W_{\pm} = ((W_{\pm})_{uv})_{u, v \in V(G)}$:

$$(W_{\pm})_{uv} = \begin{cases} \frac{\alpha_{\pm}}{d_0(e)} & \text{if } e = (u, v) \in D(G), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

定理 16 (Konno, Mitsuhashi & Sato).

G : n 点 & m 辺の連結グラフ, $\varphi: D(G) \rightarrow H$ s.t. $\sum_{o(e)=u} \varphi(e) = \alpha, \forall u \in V(G)$.

$\text{Spec}(\psi(U))$:

$$\left(\begin{array}{l} 4n \text{ 個: } \lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(\alpha_{\pm} - 1)}}{2}, \frac{\mu - \pm \sqrt{\mu^2 - 4(\alpha_{\mp} - 1)}}{2}, \\ \text{残り } 4(m-n) \text{ 個: } \pm 1 \end{array} \right) \quad (\mu \pm \in \text{Spec } W'_{\pm}).$$

U の右固有値: $\bigcup_{\mu \in \text{Spec}(\psi(U))} \mu^{H^*}.$